

Ekvivalenssiluokka

Määritelmä. Olkoon \sim joukon A ekvivalenssirelaatio. Kunkin alkion $a \in A$ kanssa ekvivalentit alkiot muodostavat joukon A osajoukon. Tätä joukkoa sanotaan alkion a *ekvivalenssiluokaksi*. Alkion a ekvivalenssiluokasta käytetään merkintää $[a]$ ja se on siis

$$[a] = \{b \in A \mid b \sim a\}.$$

Alkiota a sanotaan ekvivalenssiluokan $[a]$ *edustajaksi*.

Jokainen ekvivalenssiluokka muodostuu keskenään ekvivalenteista alkioista, toisin sanoen alkiot a ja b kuuluvat samaan ekvivalenssiluokkaan jos ja vain jos $a \sim b$. Nimittäin, jos $a \sim b$ niin $a \in [b]$ ja ekvivalenssirelation refleksiivisyyden (E1) perusteella $b \in [b]$. Kääntäen, jos a ja b kuuluvat johonkin ekvivalenssiluokkaan $[c]$, niin $a \sim c$ ja $b \sim c$; ekvivalenssirelaation symmetrisyydestä (E2) ja transitiivisuudesta (E3) seuraa, että $a \sim b$.

Lause. Jos \sim on joukon A ekvivalenssirelaatio, niin A voidaan esittää erillisten ekvivalenssiluokkien unionina:

$$A = \bigcup_{a \in D} [a] \quad ([a] \cap [a'] = \emptyset \quad \forall a, a' \in D, a \neq a'),$$

missä D on joukon A osajoukko, joka sisältää yhden alkion jokaisesta ekvivalenssiluokasta. Joukkoa D sanotaan ekvivalenssiluokkien *edustajistoksi*.

Todistus. Edellä esitetyn perusteella on selvää, että joukko A voidaan esittää ekvivalenssiluokkien unionina. Vielä pitää osoittaa, että jos a ja a' eivät ole ekvivalentteja, niin ekvivalenssiluokkien $[a]$ ja $[a']$ leikkaus on tyhjä joukko. Tehdään vastaoletus, että leikkaus $[a] \cap [a']$ sisältäisi jonkin alkion b . Silloin $b \sim a$ ja $b \sim a'$. Ekvivalenssirelaation ominaisuuksien E2 ja E3 perusteella $a \sim a'$. Koska a ja a' kuuluvat edustajistoon pitää niiden olla yhtä suuret, mutta tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa. \square

Jos joukko A on erillisten epätyhjien osajoukkojensa unioni, sanotaan, että nämä osajoukot muodostavat joukon A *partition* (eli *osituksen*). Tällöin edellinen lause voidaan muotoilla seuraavasti: *Jos joukossa A on määritelty ekvivalenssirelaation, niin ekvivalenssiluokat muodostavat joukon A partition.*

Kaikkien ekvivalenssiluokkien joukkoa sanotaan joukon A *osamäärä- tai tekijäjoukoksi*. Sitä merkitään symbolilla A/\sim ; siis

$$A/\sim = \{[a] \mid a \in A\} = \{[a] \mid a \in D\}.$$

Linkit:

Ekvivalenssirelaatio