

Esimerkkejä alirenkaista

Esimerkki. Lukujoukot

$$\mathbb{Z}[\sqrt{n}] = \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \quad (n = -1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

muodostavat kompleksilukujen renkaan $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ alirenkaita yhteenlaskun ja tulon suhteen. Nimittäin selvästi $\mathbb{Z}[\sqrt{n}] \subseteq \mathbb{C}$ ja renkaan $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ykkösalkio $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{n} \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$. Jos $a_i + b_i\sqrt{n} \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ ($i = 1, 2$), niin

$$(a_1 + b_1\sqrt{n}) - (a_2 + b_2\sqrt{n}) = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)\sqrt{n} \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}],$$

koska $a_1 - a_2 \in \mathbb{Z}$ ja $b_1 - b_2 \in \mathbb{Z}$. Vastaavasti

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1\sqrt{n}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{n}) &= a_1a_2 + a_1b_2\sqrt{n} + a_2b_1\sqrt{n} + b_1b_2\sqrt{n}\sqrt{n} \\ &= a_1a_2 + b_1b_2n + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{n} \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}], \end{aligned}$$

koska $a_1a_2 + b_1b_2n \in \mathbb{Z}$ ja $a_1b_2 + a_2b_1 \in \mathbb{Z}$. Alirengaskriteerin nojalla $(\mathbb{Z}[\sqrt{n}], +, \cdot)$ on alirengas.

Erikoistapauksessa $n = -1$ on kyseessä Gaussin kokonaisluvut.

Renkaita $(\mathbb{Z}[\sqrt{n}], +, \cdot)$ tarkasteltaessa oletetaan tavallisesti, että luku n on *neliövapaa*, toisin sanoen n ei ole jaollinen minkään ykköstä suuremman kokonaisluvun neliöllä. Silloin $\mathbb{Z}[\sqrt{n_1}] \neq \mathbb{Z}[\sqrt{n_2}]$ aina, kun $n_1 \neq n_2$.

Esimerkki. (POLYNOMIRENKAAT) Kaikkien reaalikertoimisten polynomien joukko

$$\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid n \geq 0, a_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \dots, n\}$$

on rengas polynomien yhteen- ja kertolaskun suhteen. Tämä nähdään osoittamalla, että $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ on funktiorenkkaan $(C(\mathbb{R}), +, \cdot)$ (katso sivu Esimerkkejä renkaista) alirengas.

Selvästi $\mathbb{R}[x] \subseteq C(\mathbb{R})$ ja funktiorenkkaan ykkösalkio $1 \in \mathbb{R}[x]$. Suoraan laskemalla nähdään, että myös alirengaskriteerin ehdot (ii) ja (iii) toteutuvat.

Muita polynomirenkaita ovat esimerkiksi $(\mathbb{Z}[x], +, \cdot)$ ja $(\mathbb{Q}[x], +, \cdot)$, joista ensimmäisen alkiot ovat kaikki kokonaislukukertoimiset polynomit ja toisen alkiot ovat kaikki rationaalilukukertoimiset polynomit.

Linkit:

Alirengas

Esimerkkejä renkaista