

Esimerkkejä kunnista

Esimerkki. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ja $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ovat (luku)kuntia. Kuten sivulla Esimerkkejä renkaista todetaan, nämä kaikki ovat kommutatiivisia renkaita. Lisäksi on helppo huomata, että kaikilla joukkojen $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ alkiolla on käänteisalkiot.

Kokonaislukujen muodostama rengas $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ei ole kunta, sillä vaikka se onkin kommutatiivinen rengas, niin sen nollassa eroavilla alkiolla ei ole käänteisalkioita joukossa $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Kokonaislukurengas $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ on esimerkki äärettömästi kokonaisalueesta, joka ei ole kunta.

Esimerkki. Kaikkien rationaalifunktioiden joukko

$$\mathbb{R}(x) = \left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \mid p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x], q(x) \text{ ei ole nollapolynomi} \right\},$$

muodostaa kunnan funktioiden pisteittäisen yhteen- ja kertolaskun suhteen. (Huomaa, että $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ on kommutatiivinen rengas, mutta ei kunta.)

Koska kunnan $(\mathbb{R}(x), +, \cdot)$ ykkösalkio on vakiopolynomi 1 ja kaikki tämän monikerrat $k = k \cdot 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) ovat erisuuria, on $\text{char}(\mathbb{R}(x)) = 0$.

Esimerkki. Sivun Kunta lauseesta ja sivun Esimerkkejä nollanjakajista ja kokonaisalueista neljännessä esimerkistä seuraa, että jäännösluokkarengas $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ on kunta jos ja vain jos m on alkuluku.

Olkoon p alkuluku. Jäännösluokkarengaan $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ karakteristika on p , sillä $p \cdot \bar{1} = \bar{p} = \bar{0}$ ja kaikille kokonaisluvuille n , joille $0 < n < p$, on $n \cdot \bar{1} \neq \bar{0}$.

Koska 5 on alkuluku on $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ kunta. Esitetään tämän kunnan yhteenlasku- ja kertotaulut.

| | | | | | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $+$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | \cdot | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{1}$ | $\bar{3}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{3}$ | $\bar{1}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{3}$ | $\bar{2}$ | $\bar{1}$ |

Lasketaan kunnassa $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ summa $\frac{\bar{1}}{2} + \frac{\bar{2}}{3}$.

Käyttämällä yllä olevaa kertotaulua nähdään, että $\frac{\bar{1}}{2} = \bar{1} \cdot \overline{2^{-1}} = \bar{1} \cdot \bar{3} = \bar{3}$. Vastaavasti $\frac{\bar{2}}{3} = \bar{2} \cdot \overline{3^{-1}} = \bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{4}$. Yhteenlaskutaulua käyttämällä saadaan, että

$$\frac{\bar{1}}{2} + \frac{\bar{2}}{3} = \bar{3} + \bar{4} = \bar{2}.$$

Linkit:

Esimerkkejä renkaista

Kunta