

Esimerkkejä kunnista 2

Esimerkki. Ratkaistaan kunnassa $(K, +, \cdot)$ toisen asteen yhtälö $x^2 + ax + b = 0$, missä $a, b \in K$, olettaen, että $\text{char}(K) \neq 2$.

Koska $\text{char}(K) \neq 2$ on luvulla 2 kunnassa K käänteisalkio $\frac{1}{2}$. Täten myös luvulla 4 on käänteisalkio nimittäin $(\frac{1}{2})^2$. Nyt $x^2 + ax + b = x^2 + ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + b = (x + \frac{a}{2})^2 - (\frac{a^2}{4} - b)$. Täten yhtälöllä $x^2 + ax + b = 0$ on ratkaisu kunnassa K , jos ja vain jos on olemassa sellainen kunnan K alkio y , että $y^2 = \frac{a^2}{4} - b$. Oletetaan, että tällainen alkio y on olemassa. Silloin

$$x^2 + ax + b = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{a}{2})^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow ((x + \frac{a}{2}) - y)((x + \frac{a}{2}) + y) = 0.$$

Koska kunta on kokonaisalue, tämä tarkoittaa, että joko

$$x + \frac{a}{2} + y = 0 \quad \text{tai} \quad x + \frac{a}{2} - y = 0.$$

Ratkaisuksi saadaan

$$x = -\frac{a}{2} \pm y, \quad \text{missä } y \in K \text{ toteuttaa } y^2 = \frac{a^2}{4} - b.$$

Esimerkki. Olkoon $(K, +, \cdot)$ kunta, jonka karakteristika on alkuluku p . Osoitetaan, että kuvaus

$$f_p : (K, +, \cdot) \rightarrow (K, +, \cdot), \quad f_p(x) = x^p$$

on kuntahomomorfismi.

Olkoot $a, b \in K$. Silloin käyttäen sivun Esimerkkejä nollanjakajista ja kokonaisalueista viimeistä esimerkkiä saadaan, että $f_p(a + b) = (a + b)^p = a^p + b^p = f_p(a) + f_p(b)$. Tulon kommutatiivisuudesta johtuen on $f_p(ab) = (ab)^p = a^p b^p = f_p(a) f_p(b)$. Lisäksi $f_p(1_K) = (1_K)^p = 1_K$. Täten kuvaus on rengashomomorfismi, siis myös kuntahomomorfismi.

Sivun Huomioita kunnasta viimeisen lauseen mukaan kuvaus f_p on injektio, toisin sanoen $\text{Im}(f) = \{x^p \mid x \in K\}$ muodostaa kunnan K kanssa isomorfisen kunnan. Oletuksen $\text{char}(K) = p$ nojalla K on äärellinen kunta, tällöin joukko $\text{Im}(f)$ sisältää yhtä monta alkioita kuin joukko K ja on siis sama joukon K kanssa. Siis f_p on kunnan K automorfismi.

Linkit:

Esimerkkejä kunnista

Esimerkkejä nollanjakajista ja kokonaisalueista