

# Eksakti differentiaaliyhtälö

Käyräparven  $F(x, y) = C$  differentiaaliyhtälöä johdettaessa yhtälö derivoidaan muuttujan  $x$  suhteen, jolloin saadaan

$$F_x(x, y) + F_y(x, y)y' = 0,$$

missä alaindeksit tarkoittavat osittaisderivaattoja. Tämä on parven differentiaaliyhtälö, koska se ei enää sisällä vakiota  $C$ .

Kääntäen voidaan kysyä, onko mahdollista ratkaista differentiaaliyhtälö

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$$

tulkitsamalla  $P(x, y)$  ja  $Q(x, y)$  jonkin funktion  $F(x, y)$  osittaisderivaatoiksi, jolloin ratkaisu olisi  $F(x, y) = C$ .

Yleisesti näin ei ole. Jos nimittäin olisi  $P(x, y) = F_x(x, y)$  ja  $Q(x, y) = F_y(x, y)$ , olisi sangen yleisillä edellytyksillä voimassa olevan sekaderivaattojen yhtäsuuruuden takia

$$P_y(x, y) = F_{xy}(x, y) = F_{yx}(x, y) = Q_x(x, y).$$

Ainakin siis tulee olla voimassa

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y) \quad \text{eli} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Voidaan osoittaa, että tämä ehto on myös riittävä funktion  $F$  olemassaololle. Tällöin sanotaan, että differentiaaliyhtälö on *eksakti*.

Eksakti differentiaaliyhtälö  $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$  voidaan siten ratkaista integroimalla funktio  $P(x, y)$  muuttujan  $x$  suhteen, jolloin saadaan

$$F(x, y) = \int P(x, y) dx + f(y).$$

Tässä integroimisvakio  $f(y)$  riippuu muuttujasta  $y$ , joka on integroinnin kannalta vakio. Funktio  $f(y)$  on määrättävä ehdosta  $F_y(x, y) = Q(x, y)$ , minkä jälkeen differentiaaliyhtälön ratkaisu saadaan muodossa  $F(x, y) = C$ .

## Linkkejä

[eksakti differentiaaliyhtälö, esimerkki](#)

[integroiva tekijä](#)

[käyräparven differentiaaliyhtälö](#)