Eulerin yhtälön muuntaminen ja ratkaiseminen

Lineaarista ja homogeenista differentiaaliyhtälöä

$$P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_1(x)y' + P_0(x)y = 0$$

kutsutaan *Eulerin yhtälöksi*, jos kerroinfunktiot ovat muotoa $P_k(x) = a_k x^k$, missä luvut a_k ovat vakioita.

Tämä voidaan muuntaa vakiokertoimiseksi yhtälöksi sijoituksella $x = e^t$ eli $t = \ln x$. Tällöin on rajoituttava arvoihin $x > 0$. Tuntemattoman funktion $y(x)$ sijaan tulee tällöin uusi tuntematon funktio $u(t)$:

$$y(x) = y(e^t) = u(t).$$

Funktion u derivaatat ovat

$$\begin{aligned}
u'(t) &= y'(x)e^t, \\
u''(t) &= y''(x)(e^t)^2 + y'(x)e^t, \\
u'''(t) &= y'''(x)(e^t)^3 + 3y''(x)(e^t)^2 + y'(x)e^t, \\
&\dots
\end{aligned}$$

Ratkaisemalla näistä perättäin funktio y ja sen derivaatat saadaan

$$\begin{aligned}
y(x) &= u(t), \\
y'(x) &= e^{-t}u'(t) = x^{-1}u'(t), \\
y''(x) &= e^{-2t}(u''(t) - u'(t)) = x^{-2}(u''(t) - u'(t)), \\
y'''(x) &= e^{-3t}(u'''(t) - 3u''(t) + 2u'(t)) = x^{-3}(u'''(t) - 3u''(t) + 2u'(t)), \\
&\dots
\end{aligned}$$

Kun nämä sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön, supistuvat kerroinfunktioissa olevat muuttujan x potenssit pois ja jäljelle jää funktiota $u(t)$ koskeva vakiokertoiminen yhtälö.

Tämän perusratkaisut ovat muotoa $u(t) = e^{r_k t}$ tai yhtyvien juurien tapauksessa muotoa $u(t) = t^p e^{r_k t}$, $p = 1, 2, \dots$. Palaamalla muuttujaan x saadaan

$$y(x) = u(t) = u(\ln x) = x^{r_k}$$

tai yhtyvien juurien tapauksessa $y(x) = (\ln x)^p x^{r_k}$.

Jos kerroin r_k on kompleksinen, ts. $r_k = \alpha_k + i\beta_k$, on syytä ensin lausua eksponenttimuotoinen ratkaisu reaalimuodossa ja vasta tämän jälken sijoittaa $t = \ln x$:

$$y(x) = u(t) = e^{\alpha_k t}[C_1 \cos(\beta_k t) + C_2 \sin(\beta_k t)] = x^{\alpha_k}[C_1 \cos(\beta_k \ln x) + C_2 \sin(\beta_k \ln x)].$$

Eulerin yhtälö ratkaistaankin edellä sanottuun perustuen yleensä yritteellä $y = x^r$, jolloin siirtymistä uuteen muuttujaan t ei tarvitse tehdä. Yritteen sijoittaminen yhtälöön antaa astetta n olevan polynomiyhtälön eksponentille r.

Linkkejä

Eulerin yhtälö, esimerkki
yhtälön muuntaminen sijoituksella
Eulerin yhtälön muuntaminen vakiokertoimiseksi symbolisella ohjelmalla / mma
Eulerin yhtälön muuntaminen vakiokertoimiseksi symbolisella ohjelmalla / mpl

Simo K. Kivelä 10.4.2001