

Ensimmäiseen kertalukuun palautuvat korkeampien kertalukujen yhtälöt

Toisen ja korkeamman kertaluvun yhtälöt voidaan kirjoittaa normaaliryhmän muotoon ja eräissä tapauksissa palauttaa tätä kautta ensimmäiseen kertalukuun.

Tavallisimmat tapaukset ovat seuraavat:

1) Jos toisen kertaluvun yhtälö on muotoa $y'' = f(x, y')$, on vastaava normaaliryhmä

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = f(x, z). \end{cases}$$

Tässä jälkimmäinen yhtälö on ensimmäistä kertalukua tuntemattomana funktiona z . Tämän ratkaisuna on $z(x) = y'(x)$, jolloin $y(x)$ saadaan yhdellä lisäintegroinnilla.

2) Jos yhtälö on muotoa $y'' = f(y, y')$ — jolloin se on autonominen — on normaaliryhmä

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = f(y, z) \end{cases} \quad \text{eli} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = z, \\ \frac{dz}{dx} = f(y, z). \end{cases}$$

Jos oletetaan, että jollakin tarkastelualueen osavälillä on olemassa ratkaisufunktion käänteisfunktio $x = g(y)$, pätee yhdistetyn funktion $z(g(y)) = z(x) = y'(x)$ derivaatalle ketjusäännön mukaan

$$\frac{dz}{dy} = z'(x)g'(y) = \frac{z'(x)}{y'(x)} = \frac{f(y, z)}{z}.$$

Täten päädytään ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöön

$$\frac{dz}{dy} = \frac{f(y, z)}{z},$$

joka kuvaa muuttujien y ja z välistä riippuvuutta. Yhtälöön päästään myös jakamalla normaaliryhmän yhtälöt puolittain ja supistamalla dx pois derivaattasymboleissa $\frac{dy}{dx}$ ja $\frac{dz}{dx}$.

Tuloksena on siis ensimmäisen kertaluvun yhtälö. Tämän ratkaisu on periaatteessa muotoa $z = h(y)$ tai $H(y, z) = 0$. Kyseessä on normaaliryhmän ratkaisun $y(x)$, $z(x) = y'(x)$ faasitasoesityksen yhtälö.

Vastaavanlaisia menettelyjä voidaan toisinaan käyttää myös kolmannen ja korkeampien kertalukujen yhtälöiden palauttamisessa ensimmäiseen kertalukuun.

Linkkejä

[toisen kertaluvun yhtälön palauttaminen ensimmäiseen kertalukuun ja ratkaiseminen separoimalla, esimerkki](#)

[kolmannen kertaluvun yhtälön palauttaminen ensimmäiseen kertalukuun ja ratkaiseminen separoimalla, esimerkki](#)

[vakiokertoimisen lineaariyhtälön faasitasoesitys, esimerkki](#)

[normaaliryhmä](#)

[faasitaso](#)