Ensimmäisen kertaluvun lineaarinen ja epähomogeeninen yhtälö

Yleisen teorian mukaan ensimmäisen kertaluvun epähomogeenisen yhtälön $y' + P_0(x)y = R(x)$ yleinen ratkaisu saadaan lisäämällä vastaavan homogeeniyhtälön $y' + P_0(x)y = 0$ yleiseen ratkaisuun jokin epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu.

Ratkaiseminen tapahtuu siten kahdessa vaiheessa: Ensin etsitään vastaavan homogeeniyhtälön ratkaisu, joka on muotoa $y = Cy_1(x)$. Tämän jälkeen haetaan jokin — mikä tahansa — epähomogeeniyhtälön ratkaisu.

Epähomogeeniyhtälön yksittäisratkaisu voidaan usein löytää arvaamalla sen periaatteellinen muoto ja sijoittamalla yhtälöön vastaava yrite.

Myös yleinen menettely on olemassa, mutta se saattaa johtaa hankaliin laskuihin. Yleistä menettelyä kutsutaan *vakion varioinniksi*, koska yritteenä käytetään homogeeniyhtälön yleisestä ratkaisusta saatavaa lauseketta, jossa vakio C on korvattu (ts. sitä 'varioidaan') tuntemattomalla funktiolla u: yrite on siten $y = u(x)y_1(x)$. Tuntematon funktio u pyritään määräämän siten, että yrite toteuttaa yhtälön.

Kun yrite ja sen derivaatta $y' = u'y_1 + uy_1'$ sijoitetaan differentiaaliyhtälöön ja termit ryhmitetään sopivasti, saadaan

$$u(y_1' + P_0 y_1) + u'y_1 = R.$$

Koska y_1 toteuttaa homogeeniyhtälön, on vasemman puolen ensimmäinen termi $= 0$ ja jäljelle jää yhtälö

$$u' = \frac{R}{y_1},$$

josta u saadaan yhdellä integroinnilla.

Integroimisvakiota ei tarvitse ottaa huomioon, koska tavoitteena on löytää vain jokin yksittäisratkaisu, ts. vain jokin funktio u.

Etsitty yksittäisratkaisu on siis $u(x)y_1(x)$.

Linkkejä

ensimmäisen kertaluvun lineaariyhtälö, esimerkki
vastaava homogeeniyhtälö
epähomogeenisen yhtälön ratkaisujoukko
lineaariyhtälö ja integroiva tekijä

Simo K. Kivelä 10.4.2001