Ensimmäisen kertaluvun lineaarinen ja homogeeninen yhtälö

Ensimmäisen kertaluvun normaalimuotoinen homogeeniyhtälö on $y' + P_0(x)y = 0$, missä kerroinfunktio $P_0(x)$ oletetaan jatkuvaksi tarkasteluvälillä.

Kyseessä on separoituva yhtälö

$$\frac{dy}{y} = -P_0(x)\,dx,$$

jonka puolittainen integrointi johtaa yleiseen ratkaisuun

$$y = Ce^{-\int P_0(x)\,dx}.$$

Integroitaessa tarvittava vakio on aluksi kirjoitettu muotoon $\ln|C|$. Tästä huolimatta myös arvo $C = 0$ on mahdollinen, ts. $y = 0$ kaikilla x, kuten nähdään suoraan alkuperäisestä yhtälöstä.

Jos on annettu alkuehto $y(x_0) = y_0$, voidaan puolittainen integrointi tehdä määrättynä integraalina:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{y} = -\int_{x_0}^{x} P_0(x)\,dx.$$

Tällöin ratkaisu saa muodon

$$y = y_0\,e^{-\int_{x_0}^{x} P_0(x)\,dx}.$$

Ratkaisun periaatteellinen muoto on $y = Cy_1(x)$, missä $y_1(x)$ tarkoittaa mitä tahansa nollafunktiosta eroavaa (ts. lineaarisesti riippumatonta) yhtälön yksittäisratkaisua.

Linkkejä

ensimmäisen kertaluvun lineaariyhtälö, esimerkki
homogeeniyhtälön ratkaisujoukko
funktioiden lineaarinen riippumattomuus

Simo K. Kivelä 10.4.2001