

Toisen kertaluvun lineaarinen ja homogeeninen yhtälö

Toisen kertaluvun normaalimuotoinen homogeeniyhtälö on $y'' + P_1(x)y' + P_0(x)y = 0$, missä kerroinfunctiot $P_0(x)$ ja $P_1(x)$ oletetaan jatkuviksi tarkasteluvälillä.

Yleisen teorian mukaan tämän ratkaisu on muotoa

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

missä $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ ovat yhtälön lineaarisesti riippumattomia yksittäisratkaisuja, ts. muodostavat perusjärjestelmän.

Yleistä, so. kaikissa tapauksissa toimivaa menettelyä ratkaisujen $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ etsimiseen ei ole. Usein ne pyritään löytämään arvaamalla niiden muoto ja käyttämällä tämän perusteella valittua yritettä.

Jos toinen ratkaisusta tunnetaan, on toisen etsimiseen olemassa seuraava yleinen menettely:

Olkoon $y_1(x)$ tunnettu ratkaisu. Pyritään etsimään toinen lineaarisesti riippumaton ratkaisu muodossa $y_2(x) = u(x)y_1(x)$, missä $u(x)$ on tuntematon funktio, ts. käytetään yritettä $y = u(x)y_1(x)$. Kun tämä ja sen derivaatat $y' = u'y_1 + uy_1'$, $y'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$ sijoitetaan yhtälöön ja termit ryhmitellään sopivasti, saadaan

$$u(y_1'' + P_1y_1' + P_0y_1) + u'(2y_1' + P_1y_1) + u''y_1 = 0.$$

Koska y_1 toteuttaa differentiaaliyhtälön, on ensimmäinen kolmesta termistä $= 0$. Muut kaksi antavat funktiolle u toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön

$$u'(2y_1' + P_1y_1) + u''y_1 = 0,$$

jota vastaava normaaliryhmä on

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = v, \\ \frac{dv}{dx} = -\frac{2y_1' + P_1y_1}{y_1} v. \end{cases}$$

Tässä jälkimmäinen yhtälö on separoituva ja sen ratkaiseminen antaa funktion v (koska P_1 ja y_1 tunnetaan), minkä jälkeen u saadaan yhdellä lisäintegroinnilla.

Funktio u on siis periaatteessa aina ratkaistavissa. Kaikki integroinnit eivät kuitenkaan välttämättä onnistu alkeisfunktioiden avulla.

Funktio u ei ole yksikäsitteinen. Ongelman luonteesta kuitenkin seuraa, että kaikkia mahdollisia funktioita u ei tarvitse määrittää; riittää, että löydetään yksi, joka ei ole vakio (jotta saadaan lineaarisesti riippumattomat y_1 ja y_2).

Linkkejä

[perusratkaisujen löytäminen yritteellä, esimerkki](#)

[Airyn differentiaaliyhtälö / mma](#)

[Airyn differentiaaliyhtälö / mpl](#)

[toisen perusratkaisun löytäminen yleisellä menettelyllä, esimerkki](#)

homogeeniyhtälön ratkaisujoukko
normaaliryhmä
ensimmäiseen kertalukuun palautuva toisen kertaluvun yhtälö (kohta 1)
separoituva yhtälö

Simo K. Kivelä 10.4.2001