Separoituva yhtälö

Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö on *separoituva*, jos se voidaan kirjoittaa muotoon $f(y)y' = g(x)$ eli

$$f(y(x))y'(x) = g(x),$$

missä f ja g ovat tarkastelualueessa määriteltyjä integroituvia funktioita.

Integroimalla puolittain muuttujan x suhteen saadaan

$$\int f(y(x))y'(x)\,dx = \int g(x)\,dx + C,$$

missä C on integroimisvakio. Sijoittamalla vasemman puolen integraalissa $y = y(x)$, jolloin $dy = y'(x)\,dx$, saadaan

$$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx + C.$$

Tähän muotoon päästään muistisäännönomaisesti suoraankin käyttämällä derivaatalle Leibnizin merkintää $y' = \frac{dy}{dx}$, jolloin yhtälö saa muodon

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x).$$

Laskemalla Leibnizin symbolilla kuin millä tahansa osamäärällä saadaan separoitu muoto $f(y)\,dy = g(x)\,dx$, missä muuttujat on eroteltu eri puolille yhtäläisyysmerkkiä. Tämä integroidaan puolittain.

Mikäli funktioiden f ja g integraalifunktiot F ja G ovat löydettävissä, päädytään muotoon

$$F(y) = G(x) + C.$$

Tämä on differentiaaliyhtälön ratkaisu implisiittisessä muodossa, ts. muodossa, joka ei suoraan anna funktiota $y(x)$. Ratkaisemalla saatu yhtälö y:n suhteen — jos mahdollista — löydetään myös funktion y lauseke.

Menettelyn periaatteellisena edellytyksenä on, että ratkaisu $y(x)$ on tarkastelualueessa olemassa. Muutoin ei integroimismuuttujan vaihtoa $y = y(x)$ voida vasemman puolen integraalissa tehdä. Käytännössä tähän ei yleensä kiinnitetä huomiota: ratkaisun olemassaolo voidaan jälkikäteen tarkistaa sijoittamalla funktio y suoraan alkuperäiseen yhtälöön.

Linkkejä

separoituva yhtälö, esimerkki

Simo K. Kivelä 10.4.2001