

# Erilaiset yhtälötyypit

Differentiaaliyhtälön ratkaiseminen perinteisillä käsinlaskumenetelmillä algebrallisesti, so. integrointi- ja derivointikaavoja hyödyntämällä, perustuu yhtälön tyyppin tunnistamiseen ja tälle tyyppille ominaisten menettelyjen käyttämiseen.

- Ensimmäisen kertaluvun yhtälö on *separoituva*, jos se voidaan kirjoittaa muotoon  $f(y)y' = g(x)$ , missä  $f$  ja  $g$  ovat yhden muuttujan funktioita.
- Useat ensimmäisen kertaluvun yhtälöt voidaan sopivilla sijoituksilla palauttaa separoituviksi.
- Toisen ja korkeamman kertaluvun yhtälöt voidaan kirjoittaa normaaliryhmän muotoon ja toisinaan tämän kautta palauttaa separoituviksi.
- Ensimmäisen kertaluvun yhtälö voi olla *eksakti*, jolloin se voidaan integroida muotoon  $F(x, y) = C$ .
- Vaikka ensimmäisen kertaluvun yhtälö ei olisikaan eksakti, siitä mahdollisesti voidaan saada eksakti kertomalla se sopivalla *integroivalla tekijällä*.
- Ensimmäisen kertaluvun *lineaarinen yhtälö* on muotoa

$$P_1(x)y' + P_0(x)y = R(x),$$

toisen kertaluvun muotoa

$$P_2(x)y'' + P_1(x)y' + P_0(x)y = R(x),$$

kolmannen kertaluvun muotoa

$$P_3(x)y''' + P_2(x)y'' + P_1(x)y' + P_0(x)y = R(x)$$

jne. Jos  $R(x) = 0$  kaikilla  $x$ , yhtälö on *homogeeninen*; jos näin ei ole, se on *epähomogeeninen*.

- Jos lineaariyhtälössä kerroinfunctiot  $P_k(x)$  ovat vakioita, yhtälö on *vakiokertoiminen*.
- Jos homogeenisen lineaariyhtälön kerroinfunctiot ovat muotoa  $P_k(x) = a_k x^k$  (missä  $a_k$  on vakio), kyseessä on *Eulerin yhtälö*.
- *Lineaarinen differentiaaliyhtälöryhmä* muodostuu useasta lineaarisesta yhtälöstä. Yhtälöitä ja tuntemattomia funktioita on yhtä paljon.

Suuri osa — enemmistö — differentiaaliyhtälöistä on kuitenkin sellaisia, että niiden ratkaiseminen algebrallisesti tavallisten alkeisfunktioiden avulla ei ole mahdollista. Tällöin turvaudutaan esimerkiksi *sarjaratkaisuihin* tai *numeerisiin ratkaisuihin*.

Ratkaisut voidaan usein lausua myös ns. *erikoisfunktioiden* avulla. Näiden määrittelyssä käytetään erilaisia tapoja ja määrittelyn pohjalta johdetaan funktioille laskuominaisuuksia. Voidaan ajatella, että kyseessä on alkeisfunktio kokoelman laajentaminen.

## Linkkejä

[separoituva yhtälö](#)

[separoituvaan palautuvat ensimmäisen kertaluvun yhtälöt](#)

[ensimmäiseen kertalukuun palautuvat korkeampien kertalukujen yhtälöt](#)

[eksakti differentiaaliyhtälö](#)

[integroivan tekijän menettely](#)

[ensimmäisen kertaluvun lineaarinen ja homogeeninen yhtälö](#)

[ensimmäisen kertaluvun lineaarinen ja epähomogeeninen yhtälö](#)

[toisen kertaluvun lineaarinen ja homogeeninen yhtälö](#)

[toisen kertaluvun lineaarinen ja epähomogeeninen yhtälö](#)

[korkeampien kertalukujen lineaariyhtälöt](#)

[vakiokertoiminen homogeeninen lineaariyhtälö](#)

[vakiokertoiminen epähomogeeninen lineaariyhtälö](#)

[Eulerin yhtälö](#)

[sarjaratkaisu](#)

[differentiaaliyhtälöryhmä](#)

[numeerinen ratkaiseminen](#)

*Simo K. Kivelä* 10.4.2001