Vakiokertoiminen homogeeniyhtälö

Kertalukua n oleva lineaarinen vakiokertoiminen homogeeninen differentiaaliyhtälö on

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

missä kertoimet a_k ovat vakioita. Yleisen lineaariyhtälöiden teorian mukaan tämän ratkaisu on muotoa

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

missä funktiot y_k ovat lineaarisesti riippumattomia.

Yhtälö voidaan ratkaista yritteellä $y = e^{rx}$, missä luku r määrätään siten, että yrite toteuttaa yhtälön. Yritteen derivaatat ovat yksinkertaisia: $y^{(k)} = r^k e^{rx}$. Kun nämä sijoitetaan differentiaaliyhtälöön, saadaan

$$(r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0)e^{rx} = 0.$$

Tekijä e^{rx} voidaan jakaa pois, ja päädytään polynomiyhtälöön, ns. *karakteristiseen yhtälöön*

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0.$$

Jos tämän juuret $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n$ ovat kaikki reaalisia ja eri suuria, on löydetty lineaarisesti riippumattomat perusratkaisut:

$$y_1(x) = e^{r_1 x},\ y_2(x) = e^{r_2 x},\ \ldots,\ y_n(x) = e^{r_n x}.$$

Jos joukossa on yhtä suuria juuria, ei perusratkaisuihin voida ottaa kahteen kertaan samaa funktiota, koska tällöin systeemistä tulisi lineaarisesti riippuva. Voidaan osoittaa, että kahden yhtä suuren juuren ($r_1 = r_2 = r$) tapauksessa vastaaviksi lineaarisesti riippumattomiksi perusratkaisuiksi kelpaavat $y_1(x) = e^{rx}$ ja $y_2(x) = xe^{rx}$. Jos yhtä suuria juuria on enemmän, vastaaviin lineaarisesti riippumattomiin ratkaisuihin tulee korkeampia muuttujan x potensseja: $y_3(x) = x^2 e^{rx}$ jne.

Jos juurten joukossa on kompleksilukuja, nämä esiintyvät liittolukupareina: $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$. Vastaavat perusratkaisut voitaisiin kirjoittaa kompleksisen eksponenttifunktion avulla muodossa

$$y_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad y_2(x) = e^{(\alpha-i\beta)x},$$

mutta koska differentiaaliyhtälö on reaalinen, on luontevampaa käyttää reaalisia perusratkaisuja. Eulerin kaavan $e^{it} = \cos t + i \sin t$ avulla voidaan kompleksisten eksponenttifunktioiden avulla lausutut ratkaisut muuntaa reaaliseen muotoon, jossa lineaarisesti riippumattomina funktioina ovat

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x), \quad y_2(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x).$$

Linkkejä

homogeeninen vakiokertoiminen yhtälö, esimerkki
yhtä suurten juurten tapauksen perustelu / mma
kompleksisten juurten tapauksen perustelu / mma
yhtä suurten juurten tapauksen perustelu / mpl
kompleksisten juurten tapauksen perustelu / mpl

homogeeniyhtälön ratkaisujoukko
värähtelevä jousi / mma
värähtelevä jousisysteemi / mma
vaihtovirtapiirin vapaa värähtely / mma
värähtelevä jousi / mpl
värähtelevä jousisysteemi / mpl
vaihtovirtapiirin vapaa värähtely / mpl

Simo K. Kivelä 10.4.2001