Eksakti differentiaaliyhtälö

Differentiaaliyhtälön $(3x^2+6xy^2)+(6x^2y+4y^3)y'=0$ kerroinfunktioille $P(x,y)=3x^2+6xy^2$ ja $Q(x,y)=6x^2y+4y^3$ pätee

$$\frac{\partial P}{\partial y}=12xy=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

ja yhtälö on siis eksakti.

Tällöin sillä on muotoa $F(x,y)=C$ oleva ratkaisu, missä

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,y)=3x^2+6xy^2 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y)=6x^2y+4y^3.$$

Eksakti yhtälö ratkaistaan integroimalla aluksi jompikumpi näistä yhtälöistä. Jos edellinen integroidaan muuttujan x suhteen, saadaan

$$F(x,y)=x^3+3x^2y^2+f(y).$$

Tässä oleva integroimisvakio $f(y)$ voi riippua muuttujasta y.

Funktio $f(y)$ saadaan määritetyksi jälkimmäisen ehdon perusteella:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y) \quad \text{eli} \quad 6x^2y+f'(y)=6x^2y+4y^3,$$

jolloin $f'(y)=4y^3$ ja siis $f(y)=y^4$.

Differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on tällöin

$$x^3+3x^2y^2+y^4=C.$$

Funktion f lausekkeessa voisi periaatteessa esiintyä myös integroimisvakio, mutta tämä on merkityksetön, koska sen voidaan katsoa sisältyvän yleisen ratkaisun vakioon C.

Linkkejä

differentiaaliyhtälön eksaktius

Simo K. Kivelä 26.04.2001