Integroiva tekijä

1) Differentiaaliyhtälön $y+(x^2y-x)y'=0$ kerroinfunktiot ovat $P(x,y)=y$ ja $Q(x,y)=x^2y-x$. Koska osittaisderivaatat

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2xy-1$$

ovat eri suuret, yhtälö ei ole eksakti.

Jos yhtälö kerrotaan tekijällä $1/x^2$, se saa muodon

$$\frac{y}{x^2}+\left(y-\frac{1}{x}\right)y'=0.$$

Tällöin

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2}=\frac{1}{x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(y-\frac{1}{x}\right),$$

ja yhtälö siis on eksakti. Kerroin $1/x^2$ on yhtälön integroiva tekijä.

Yhtälö voidaan tällöin ratkaista eksaktiuteen perustuen. Tulos on

$$-\frac{y}{x}+\frac{y^2}{2}=C \quad \text{eli} \quad xy^2-2y=2Cx.$$

2) Joissakin erikoistapauksissa voidaan sopiva integroiva tekijä etsiä laskemalla. Esimerkkinä olkoon yhtälö $(2xy-y^2-y)+(2xy-x^2-x)y'=0$, jolle yritetään etsiä muotoa $M(x+y)$ oleva integroiva tekijä. Tässä M on siis yhden muuttujan funktio, jonka argumenttina on summa $x+y$.

Kun yhtälö kerrotaan integroivalla tekijällä saadaan kerroinfunktioiksi

$$P(x,y)=M(x+y)(2xy-y^2-y), \quad Q(x,y)=M(x+y)(2xy-x^2-x).$$

Eksaktiusehto $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ antaa tällöin

$$\begin{aligned}&M'(x+y)(2xy-y^2-y)+M(x+y)(2x-2y-1)\\&\qquad=M'(x+y)(2xy-x^2-x)+M(x+y)(2y-2x-1),\end{aligned}$$

mikä sievenee muotoon

$$M'(x+y)(x+y+1)=-4M(x+y) \quad \text{eli} \quad M'(t)(t+1)=-4M(t);$$

tässä on merkitty $t=x+y$. Saatu yhtälö on separoituva, ja sen eräs ratkaisu on $M(t)=1/(t+1)^4$, jolloin integroivaksi tekijäksi saadaan

$$M(x+y)=\frac{1}{(x+y+1)^4}.$$

Tällöin yhtälöstä tulee eksakti ja se voidaan ratkaista. Tulos voidaan kirjoittaa muotoon

$$xy=C(x+y+1)^3.$$

Linkkejä

integroivan tekijän menettely
differentiaaliyhtälön eksaktius
eksaktin yhtälön ratkaiseminen, esimerkki

Simo K. Kivelä 26.04.2001