Lineaariyhtälö ja integroiva tekijä

Lineaarinen epähomogeeninen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö $y' + P(x)y = R(x)$ voidaan ratkaista integroivan tekijän menettelyllä.

Kertomalla yhtälö tekijällä

$$M(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

ja siirtelemällä termejä se saadaan muotoon $[M(x)P(x)y - M(x)R(x)] + M(x)y' = 0$. Tämän kerroinfunktioille pätee

$$\frac{\partial}{\partial y}[M(x)P(x)y - M(x)R(x)] = M(x)P(x) = \frac{\partial}{\partial x}M(x).$$

Yhtälö on siis eksakti ja $M(x)$ on integroiva tekijä.

Ratkaisu on tällöin löydettävissä muodossa $F(x,y) = C$, missä

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x)P(x)y - M(x)R(x) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = M(x).$$

Integroimalla jälkimmäinen yhtälö muuttujan y suhteen saadaan $F(x,y) = M(x)y + g(x)$, missä $g(x)$ on integroimisvakio. Edellisestä yhtälöstä seuraa tämän jälkeen

$$M(x)P(x)y + g'(x) = M(x)P(x)y - M(x)R(x) \quad \text{eli} \quad g'(x) = -M(x)R(x),$$

ja funktio $g(x)$ saadaan yhdellä integroinnilla.

Yhdistämällä saadut tulokset ja kirjoittamalla tekijän $M(x)$ lauseke paikoilleen saadaan yhtälö $F(x,y) = C$ muotoon

$$ye^{\int P(x)\,dx} - \int R(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx = C.$$

Ratkaisemalla tästä y saadaan yhtälön yleinen ratkaisu:

$$y = Cy_1(x) + y_1(x)\int \frac{R(x)}{y_1(x)}\,dx,$$

missä on merkitty

$$y_1(x) = e^{-\int P(x)\,dx}.$$

Lukija verratkoon tätä vakion varioinnilla saatavaan ratkaisuun!

Linkkejä

integroivan tekijän menettely
differentiaaliyhtälön eksaktius
eksaktin yhtälön ratkaiseminen, esimerkki
integroivan tekijän käyttö, esimerkki
1. kertaluvun lineaarinen ja homogeeninen yhtälö
1. kertaluvun lineaarinen ja epähomogeeninen yhtälö

Simo K. Kivelä 26.04.2001