

Ensimmäisen kertaluvun lineaarinen yhtälö

Lineaarisen epähomogeenisen differentiaaliyhtälön

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2 \cos 3x$$

yleisen ratkaisun etsimiseksi on käsin laskettaessa ensin ratkaistava vastaava homogeeniyhtälö

$$y' - \frac{2}{x}y = 0.$$

Tämä on separoituva: $dy/y = 2dx/x$. Homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on siten

$$y = Cx^2.$$

Epähomogeenisen yhtälön yleiseen ratkaisuun tarvitaan lisäksi jokin epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu. Tämä voidaan etsiä joko arvaamalla sen muoto ja sijoittamalla sopiva yrite yhtälöön tai yleispätevällä vakion variointi -menettelyllä.

Yhtälön muodon perusteella tuntuisi järkevältä valita yritteeksi $y = Ax^2 \sin 3x + Bx^2 \cos 3x$ ja pyrkiä määrittämään vakiot A ja B sopivasti. Tämän derivointi nimittäin tuottaa paitsi samanmuotoisia termejä myös muotoja $x \sin 3x$ ja $x \cos 3x$ olevia termejä, joita toisaalta syntyy myös kerrottaessa yrite y funktiolla $2/x$.

Yritteen sijoittaminen yhtälöön antaa

$$2Ax \sin 3x + 3Ax^2 \cos 3x + 2Bx \cos 3x - 3Bx^2 \sin 3x - 2Ax \sin 3x - 2Bx \cos 3x = x^2 \cos 3x$$

eli

$$3Ax^2 \cos 3x - 3Bx^2 \sin 3x = x^2 \cos 3x.$$

Jotta yhtälö olisi voimassa kaikilla arvoilla x , on ilmeisestikin oltava $A = \frac{1}{3}$ ja $B = 0$. Yksittäisratkaisu on siis $y = \frac{1}{3}x^2 \sin 3x$, jolloin epähomogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y = Cx^2 + \frac{1}{3}x^2 \sin 3x.$$

Epähomogeeniyhtälön yksittäisratkaisu voidaan myös hakea vakion varioinnilla, jolloin käytetään yritettä $y = u(x)x^2$ ja pyritään määrittämään sopiva funktio $u(x)$. Tekijä x^2 on peräisin homogeeniyhtälön yleisestä ratkaisusta. Yritteen sijoittaminen yhtälöön antaa

$$x^2 u' + 2xu - 2xu = x^2 \cos 3x.$$

Tästä supistuu funktio u pois (näin käy aina) ja jäljelle jää vain derivaatan u' sisältävä yhtälö $u' = \cos 3x$. Tällä on ratkaisuna muiden ohella $u = \frac{1}{3} \sin 3x$, jolloin yksittäisratkaisuksi saadaan $y = u(x)x^2 = \frac{1}{3}x^2 \sin 3x$ kuten edelläkin.

Linkkejä

[ensimmäisen kertaluvun homogeeninen yhtälö](#)
[ensimmäisen kertaluvun epähomogeeninen yhtälö](#)
[separoituva yhtälö](#)