Toisen kertaluvun lineaarinen epähomogeeninen yhtälö: yksittäisratkaisu vakioiden varioinnilla

Toisen kertaluvun lineaarista epähomogeenista yhtälöä

$$y'' + y = 2x\sin x$$

vastaava homogeeniyhtälö $y'' + y = 0$ on vakiokertoiminen, ja sen yleinen ratkaisu on $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

Epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisun muoto on vaikeasti arvattavissa. Ainoaksi mahdollisuudeksi jää tällöin soveltaa yleistä vakioiden variointi -menettelyä, jolloin yritteeksi otetaan $y = u(x)\sin x + v(x)\cos x$ ja pyritään määrittämään funktiot u ja v siten, että tämä toteuttaa yhtälön.

Yritteen derivaatta on $y' = u\cos x - v\sin x + u'\sin x + v'\cos x$, mutta tätä yksinkertaistetaan asettamalla lisäehto

$$u'\sin x + v'\cos x = 0,$$

jolloin $y' = u\cos x - v\sin x$. Toinen derivaatta on tällöin $y'' = -u\sin x - v\cos x + u'\cos x - v'\sin x$. Derivaattojen sijoittaminen differentiaaliyhtälöön johtaa itse funktioiden u ja v supistumiseen pois (näin käy menettelyssä aina), ja jäljelle jää vain derivaattoja koskeva yhtälö

$$u'\cos x - v'\sin x = 2x\sin x.$$

Derivaatoille u' ja v' on tällöin saatu lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} u'\cos x - v'\sin x = 2x\sin x, \\ u'\sin x + v'\cos x = 0, \end{cases}$$

josta ratkaisemalla saadaan

$$u' = 2x\sin x\cos x = x\sin 2x, \quad v' = -2x\sin^2 x = x(\cos 2x - 1).$$

Näiden integrointi antaa

$$u(x) = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x + \text{vakio}, \quad v(x) = \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}x^2 + \text{vakio}.$$

Etsitty yksittäisratkaisu on tällöin $y = u(x)\sin x + v(x)\cos x$. Asettamalla vakiot $= 0$ ja sieventämällä trigonometrisesti tämä voidaan saada muotoon

$$y = u(x)\sin x + v(x)\cos x = \frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{2}x\sin x - \frac{1}{2}x^2\cos x.$$

Epähomogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu saadaan laskemalla yhteen homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu ja saatu yksittäisratkaisu. Koska vakiot C_1 ja C_2 ovat mielivaltaisia, voidaan yksittäisratkaisun termi $\frac{1}{4}\cos x$ ajatella yhdistettäväksi termiin $C_2\cos x$, jolloin yleiseksi ratkaisuksi saadaan

$$y = C_1\sin x + C_2\cos x + \frac{1}{2}(x\sin x - x^2\cos x).$$

Linkkejä

toisen kertaluvun epähomogeeninen yhtälö
vakiokertoiminen homogeeniyhtälö

Simo K. Kivelä 26.04.2001