Toisen kertaluvun lineaarinen epähomogeeninen yhtälö: yksittäisratkaisu sopivalla yritteellä

Toisen kertaluvun lineaarista epähomogeenista alkuarvoprobleemaa

$$(x+1)y'' - xy' - y = (x+1)^2, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

vastaavan homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\,dt.$$

Epähomogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu saadaan lisäämällä tähän jokin epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu.

Yhtälön muodon perusteella saattaisi olla mahdollista löytää yksittäisratkaisuksi toisen asteen polynomi. Sopiva yrite olisi siten $y = ax^2 + bx + c$, missä kertoimet a, b ja c määritetään siten, että yhtälö toteutuu.

Sijoittamalla yrite yhtälöön saadaan

$$2a(x+1) - x(2ax+b) - (ax^2+bx+c) = (x+1)^2.$$

Tämä sievenee muotoon

$$-3ax^2 + 2(a-b)x + (2a-c) = x^2 + 2x + 1.$$

Jotta oikean ja vasemman puolen polynomit olisivat samat, tulee kertoimien olla samat: $-3a = 1$, $a - b = 1$, $2a - c = 1$. Tästä seuraa $a = -\frac{1}{3}$, $b = -\frac{4}{3}$, $c = -\frac{5}{3}$, jolloin yksittäisratkaisu on

$$y = -\frac{1}{3}(x^2 + 4x + 5).$$

Differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on siis

$$y = C_1 e^x + C_2 e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\,dt - \frac{1}{3}(x^2 + 4x + 5).$$

Alkuarvoprobleeman ratkaisu saadaan vaatimalla, että yleinen ratkaisu toteuttaa alkuehdot. Ehdosta $y(0) = 0$ seuraa $C_1 - \frac{5}{3} = 0$. Koska

$$y' = C_1 e^x + C_2 e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\,dt + \frac{C_2}{x+1} - \frac{1}{3}(2x+4),$$

seuraa ehdosta $y'(0) = 0$ yhtälö $C_1 + C_2 - \frac{4}{3} = 0$. On siis oltava $C_1 = \frac{5}{3}$ ja $C_2 = -\frac{1}{3}$. Alkuarvoprobleeman ratkaisu on siten

$$y = \frac{1}{3}\left(5e^x - e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\,dt - x^2 - 4x - 5\right) \quad \text{alueessa } x > -1.$$

Linkkejä

toisen kertaluvun epähomogeeninen yhtälö
vastaavan homogeeniyhtälön ratkaiseminen
alkuehto

Simo K. Kivelä 26.04.2001