Toisen kertaluvun lineaarinen homogeeninen yhtälö: ratkaisu sopivalla yritteellä

Toisen kertaluvun lineaarisen ja homogeenisen differentiaaliyhtälön

$$(x^2-2x-1)y''-2(x-1)y'+2y=0$$

yleistä ratkaisua varten tarvitaan kaksi lineaarisesti riippumatonta yhtälön yksittäisratkaisua.

Jos y on toisen asteen polynomi, yhtälön jokaisen termin asteluvuksi tulee 2. Saattaisi siis olla mahdollista löytää sellaiset polynomin kertoimet, että yhtälö toteutuu. Varmaa tämä ei ole, eikä ole myöskään lainkaan selvää, että tällä tavoin löydetään kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua. Polynomiyritteen käyttö on kuitenkin lupaavantuntuinen tapa aloittaa yhtälön tutkiminen.

Olkoon siis yritteenä $y=ax^2+bx+c$, missä kertoimet a, b ja c pyritään määrittämään siten, että yhtälö toteutuu. Sijoittamalla yrite yhtälöön saadaan

$$2a(x^2-2x-1)-2(x-1)(2ax+b)+2(ax^2+bx+c)=0,$$

missä suurin osa termeistä supistuu pois ja jäljelle vain $-2a+2b+2c=0$. Tällöin ilmeisestikin kaksi kerrointa voidaan valita vapaasti, minkä jälkeen kolmas määräytyy näiden perusteella, esimerkiksi $c=a-b$.

Differentiaaliyhtälön toteuttaa siis toisen asteen polynomi

$$y=ax^2+bx+a-b=a(x^2+1)+b(x-1),$$

missä a ja b voidaan valita vapaasti.

Kyseessä on differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu, sillä funktiot x^2+1 ja $x-1$ ovat lineaarisesti riippumattomia. Tavanomaisen tapaan kirjoitettuna yhtälön ratkaisu on siis

$$y=C_1(x^2+1)+C_2(x-1).$$

Edellä voitaisiin yhtä hyvin valita $a=b+c$, jolloin ratkaisuksi tulisi

$$y=(b+c)x^2+bx+c=b(x^2+x)+c(x^2+1).$$

Lineaarisesti riippumattomiksi perusratkaisuiksi kelpaisivatkin aivan yhtä hyvin x^2+x ja x^2+1.

Linkkejä

toisen kertaluvun homogeeninen yhtälö
funktioiden lineaarinen riippumattomuus

Simo K. Kivelä 26.04.2001