Epähomogeenisen yhtälön ratkaisujoukko

Kertalukua n oleva lineaarinen ja epähomogeeninen differentiaaliyhtälö on normaalimuodossa

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_1(x)y' + P_0(x)y = R(x).$$

Tämän yleinen ratkaisu voidaan suoraan kirjoittaa, jos tunnetaan vastaavan homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu, joka on muotoa

$$y_C = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n,$$

ja jokin — mikä tahansa — epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu y_0. Epähomogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on nimittäin näiden summa:

$$y(x) = y_C(x) + y_0(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x) + y_0(x).$$

Todistus on hyvin lyhyt, kun differentiaaliyhtälö kirjoitetaan operaattorimerkintää käyttäen: $\mathrm{L}y = R$.

Koska $\mathrm{L}y_C = 0$ ja $\mathrm{L}y_0 = R$, on edellä esitetty $y = y_C + y_0$ todellakin yhtälön ratkaisu:

$$\mathrm{L}y = \mathrm{L}(y_C + y_0) = \mathrm{L}y_C + \mathrm{L}y_0 = 0 + R = R.$$

Jos toisaalta y_1 on jokin epähomogeenisen yhtälön ratkaisu, ts. $\mathrm{L}y_1 = R$, on $y_1 - y_0$ homogeeniyhtälön ratkaisu:

$$\mathrm{L}(y_1 - y_0) = \mathrm{L}y_1 - \mathrm{L}y_0 = R - R = 0.$$

Tällöin on $y_1 - y_0 = y_C$, kun vakiot C_k ratkaisussa y_C valitaan sopivasti. Siis y_1 on muotoa $y_C + y_0$.

Linkkejä

lineaariyhtälön käsite
homogeenisen yhtälön ratkaisujoukko
ensimmäisen kertaluvun epähomogeeninen yhtälö
toisen kertaluvun epähomogeeninen yhtälö
korkeampien kertalukujen lineaariyhtälöt

Simo K. Kivelä 29.03.2001