Eulerin yhtälö

1) Toisen kertaluvun lineaarinen ja homogeeninen differentiaaliyhtälö $x^2y'' - 3xy' + y = 0$ on esimerkki Eulerin yhtälöstä. Se on helpointa ratkaista yritteellä $y = x^r$. Tämän sijoittaminen yhtälöön antaa

$$r(r-1)x^r - 3rx^r + x^r = 0.$$

Jakamalla tekijä x^r pois yhtälöstä päädytään ehtoon $r^2 - 4r + 1 = 0$, mistä seuraa $r = 2 \pm \sqrt{3}$. Yhtälön yleinen ratkaisu on siten

$$y = C_1 x^{2+\sqrt{3}} + C_2 x^{2-\sqrt{3}}.$$

Koska eksponentit eivät ole kokonaislukuja, on rajoituttava alueeseen $x > 0$.

2) Jos kolmannen kertaluvun yhtälöön $x^3y''' - 5x^2y'' + 14xy' - 18y = 0$ sijoitetaan yrite $y = x^r$, päädytään yhtälöön $r^3 - 8r^2 + 21r - 18 = 0$. Tämän juuret ovat $r_1 = 2$, $r_2 = r_3 = 3$.

Tämä vastaa tilannetta, missä sijoituksella $x = e^t$ vakiokertoimiseksi muunnetulla yhtälöllä on yleinen ratkaisu $u = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3te^{3t}$. Sijoittamalla tähän $t = \ln x$ voidaan palata alkuperäiseen muuttujaan, ja yleiseksi ratkaisuksi saadaan

$$y = C_1x^2 + C_2x^3 + C_3x^3 \ln x.$$

Edellytyksenä on, että $x > 0$.

Lukija todetkoon, että jos $x < 0$, niin yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y = C_1x^2 + C_2x^3 + C_3x^3 \ln(-x).$$

3) Jos yhtälöön $x^2y'' - 3xy' + 13y = 0$ sijoitetaan yrite $y = x^r$, saadaan toisen asteen yhtälö $r^2 - 4r + 13 = 0$, jonka juuret ovat kompleksiset: $r_1 = 2 + 3i$, $r_2 = 2 - 3i$.

Vakiokertoimiseksi muunnetulla yhtälöllä on tällöin perusratkaisut $u_1 = e^{2t}\cos(3t)$ ja $u_2 = e^{2t}\sin(3t)$. Sijoittamalla näihin $t = \ln x$ saadaan perusratkaisuiksi $y_1 = x^2\cos(3\ln x)$ ja $y_2 = x^2\sin(3\ln x)$, jolloin yleinen ratkaisu on

$$y = C_1x^2\cos(3\ln x) + C_2x^2\sin(3\ln x), \quad x > 0.$$

Jos $x < 0$, on yleinen ratkaisu vastaavasti

$$y = C_1x^2\cos(3\ln(-x)) + C_2x^2\sin(3\ln(-x)).$$

Linkkejä

Eulerin yhtälö

Simo K. Kivelä 26.04.2001