

# Homogeenisen kolmannen kertaluvun lineaariyhtälön yleinen ratkaisu

Kolmannen kertaluvun lineaarisella ja homogeenisella differentiaaliyhtälöllä

$$(x-1)y''' - xy'' + y' = 0$$

on ilmeisestikin ratkaisuna vakiofunktio, esimerkiksi  $y_1(x) = 1$ . Koska kerroinfunktioiden  $x-1$ ,  $-x$  ja  $1$  summa on  $= 0$ , on ratkaisuna myös eksponenttifunktio  $y_2(x) = e^x$ . Melko helposti on havaittavissa, että lisäksi funktio  $y_3(x) = x^2$  toteuttaa yhtälön.

Lineaarista ja homogeenista yhtälöä koskeva teoria sanoo tällöin, että yhtälön yleinen ratkaisu saadaan näistä:

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 x^2.$$

Edellytyksenä on, että funktiot  $1$ ,  $e^x$  ja  $x^2$  ovat lineaarisesti riippumattomia. Näin kuitenkin on, mikä nähdään esimerkiksi sijoittamalla testiyhtälöön  $\lambda_1 + \lambda_2 e^x + \lambda_3 x^2 = 0$  arvot  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = -1$  ja ratkaisemalla saatu lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1 + e\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \frac{1}{e}\lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Saatu yleinen ratkaisu on kaikkialla säännöllinen. Differentiaaliyhtälö ei kuitenkaan täytä alkuarvoprobleeman ratkaisun olemassaoloa koskevan lauseen ehtoja. Normaalimuodossa differentiaaliyhtälö nimittäin on

$$y''' - \frac{x}{x-1}y'' + \frac{1}{x-1}y' = 0,$$

joten vaatimukset kerroinfunktioiden jatkuvuudesta eivät täyty välillä, joka sisältää pisteen  $x = 1$ . Ratkaisujen kannalta ei tämä piste kuitenkaan näytä poikkeukselliselta ainakaan ensi näkemältä. Se on kuitenkin piste, jossa yhtälön ratkaisu ei toteuta mitä tahansa alkuehtoa. Yleisen ratkaisun derivaatat nimittäin ovat

$$y' = C_2 e^x + 2C_3 x \quad \text{ja} \quad y'' = C_2 e^x + 2C_3,$$

ja pisteessä  $x = 1$  nämä saavat saman arvon vakioista  $C_2$  ja  $C_3$  riippumatta. Ratkaisua ei siis löydy, jos alkuehdossa vaaditaan, että  $y'(1)$  ja  $y''(1)$  saavat eri suuret arvot.

## Linkkejä

[homogeenisen yhtälö ratkaisujoukko](#)  
[lineaarinen riippumattomuus](#)  
[lineaariyhtälön ratkaisun olemassaolo](#)  
[alkuehto](#)