Homogeenisen yhtälön ratkaisujoukko

Kertalukua n oleva lineaarinen ja homogeeninen differentiaaliyhtälö on normaalimuodossa

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_1(x)y' + P_0(x)y = 0.$$

Funktiot P_k oletetaan jatkuviksi tarkasteluvälillä. Yhtälön yleisen ratkaisun voidaan osoittaa olevan muotoa

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k \quad \text{eli} \quad y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

missä $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ovat määräämättömät vakiot ja funktiot $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ ovat mitkä tahansa lineaarisesti riippumattomat yhtälön yksittäisratkaisut.

Homogeeniyhtälön lineaarisesti riippumattomia yksittäisratkaisuja sanotaan sen *perusratkaisuiksi* ja niiden sanotaan muodostavan ratkaisujen *perusjärjestelmän*.

Yleisen ratkaisun muoto ei anna viitteitä siitä, miten ratkaisu voitaisiin löytää. Yleistä algoritmia ratkaisun etsimiseen ei edes ole.

Jos kyseessä kuitenkin on ensimmäisen kertaluvun yhtälö $y' + P_0(x)y = 0$, yleinen ratkaisu löydetään separoimalla. Tämä johtaa muotoon $y(x) = C_1 y_1(x)$, mikä vastaa em. yleistä muotoa tilanteessa, missä summassa on vain yksi termi.

On helppoa todistaa, että väitetyn muotoinen lauseke todella on differentiaaliyhtälön ratkaisu. Tämä tapahtuu helpoimmin lausumalla yhtälö lineaarisen differentiaalioperaattorin L avulla muodossa $\mathrm{L}y = 0$ ja sijoittamalla lauseke tähän:

$$\mathrm{L}(C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n) = C_1 \mathrm{L} y_1 + C_2 \mathrm{L} y_2 + \cdots + C_n \mathrm{L} y_n = 0.$$

Tuloksena on 0, koska jokainen y_k on differentiaaliyhtälön yksittäisratkaisu eli $\mathrm{L}y_k = 0$.

Hieman vaikeampaa on osoittaa, että yhtälön kaikki ratkaisut voidaan kirjoittaa tähän muotoon valitsemalla vakioille C_k sopivat arvot. Tämä perustuu keskeisesti ratkaisujen Wronskin determinantin ominaisuuksiin ja yleiseen lauseeseen alkuarvoprobleeman ratkaisun yksikäsitteisyydestä.

Linkkejä

lineaariyhtälön käsite
lineaarinen riippumattomuus
Wronskin determinantti
homogeenisen kolmannen kertaluvun yhtälön yleinen ratkaisu, esimerkki
ensimmäisen kertaluvun homogeeniyhtälö
toisen kertaluvun homogeeniyhtälö

Simo K. Kivelä 29.03.2001