Lineaariyhtälön ratkaisun olemassaolo

Lineaariset differentiaaliyhtälöt ovat varsin hyvin käyttäytyviä: alkuarvoprobleemalle on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu sangen yleisillä edellytyksillä.

Lause. *Olkoon tarkasteltavana normaalimuotoinen kertalukua n oleva lineaarinen (homogeeninen tai epähomogeeninen) differentiaaliyhtälö*

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_1(x)y' + P_0(x)y = R(x)$$

(missä siis korkeimman kertaluvun derivaatan kerroin on $=1$*) ja alkuehto*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}.$$

Jos funktiot P_k*,* $k = 0, 1, \ldots, n-1$*, ja* R *ovat jatkuvia tarkasteluvälillä* $[a, b]$*, johon alkuehtokohta* x_0 *kuuluu, niin alkuarvoprobleemalla on tällä välillä yksikäsitteinen ratkaisu.*

Ehto yhtälön normaalimuotoisuudesta on oleellinen. Esimerkiksi Eulerin yhtälön $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ kerroinfunktiot $P_2(x) = x^2$, $P_1(x) = -4x$ ja $P_0(x) = 6$ ovat kyllä jatkuvia, mutta yhtälön yleinen ratkaisu $y = C_1x^2 + C_2x^3$ toteuttaa vakioista C_1 ja C_2 riippumatta alkuehdon $y(0) = y'(0) = 0$. Alkuarvoprobleemalla on tällöin äärettömän monta ratkaisua. Jos toisaalta alkuehtona on vaikkapa $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, ei ratkaisua löydy lainkaan. Normaalimuodossa yhtälö onkin

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0,$$

jolloin kerroinfunktiot eivät ole edes määriteltyjä alkuehtokohdassa $x = 0$.

Lause voidaan todistaa samaan tapaan kuin yleisen tapauksen ratkaisun olemassaoloa koskeva lause. Oleellisena erona on, että suorakulmion sijasta voidaan tarkastella y-suunnassa rajoittamatonta vyötä $\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}$. Seurauksena on, että ei jouduta rajoittamaan väliä, jolla ratkaisu on olemassa.

Linkkejä

ratkaisun olemassaolo yleisessä tapauksessa
Eulerin yhtälön ratkaiseminen, esimerkki
kolmannen kertaluvun yhtälö, jossa lauseen oletukset eivät täyty, esimerkki

Simo K. Kivelä 29.03.2001