

# Lineaarisesti riippumattomat ja lineaarisesti riippuvat funktiot

1) Olkoon tutkittavana funktioiden  $y_1(x) = \sin x$ ,  $y_2(x) = \cos x$  ja  $y_3(x) = \cos 2x$  lineaarinen riippuvuus tai riippumattomuus tarkasteluvälinä koko reaaliakseli.

Testiyhtälö on

$$\lambda_1 \sin x + \lambda_2 \cos x + \lambda_3 \cos 2x = 0 \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Koska tämä on voimassa kaikilla arvoilla  $x$ , se on erityisesti voimassa, jos  $x = 0$ ,  $x = \pi/2$  tai  $x = \pi$ . Näillä arvoilla saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0, \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Laskemalla ensimmäinen ja kolmas yhtälö yhteen päädytään tulokseen  $\lambda_3 = 0$ , minkä jälkeen seuraa selvästikin myös  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

Koska kaikki kertoimet  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ovat välttämättä  $= 0$ , funktiot ovat lineaarisesti riippumattomat.

2) Olkoon tarkasteltavana funktiot  $y_1(x) = \sin^2 x$ ,  $y_2(x) = \cos^2 x$  ja  $y_3(x) = \cos 2x$ .

Testiyhtälö on nyt

$$\lambda_1 \sin^2 x + \lambda_2 \cos^2 x + \lambda_3 \cos 2x = 0.$$

Samalla tavalla kuin edellä saataisiin nyt yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Tällä on edellisestä poiketen ratkaisuna esimerkiksi  $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ . Tuloksesta ei kuitenkaan voida päätellä, että funktiot olisivat lineaarisesti riippuvia: voisihan olla, että valitsemalla joitakin muita arvoja kuin  $0, \pi/2$  ja  $\pi$  muuttujalle  $x$  päädyttäisiin yhtälöryhmään, jolla nollasta eroavia ratkaisuja ei olisi. Koska kaikkia muuttujan  $x$  arvoja ei tällä tavoin voida käydä lävitse, ei menettely johda tulokseen.

Funktiot kuitenkin ovat lineaarisesti riippuvia, sillä trigonometrian kaava

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \text{eli} \quad \sin^2 x - \cos^2 x + \cos 2x = 0$$

on voimassa kaikilla muuttujan  $x$  arvoilla. Testiyhtälöllä on siten ratkaisuna ainakin  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_3 = 1$ .

## Linkkejä

[lineaarinen riippumattomuus](#)