

# Lineaarinen riippumattomuus

Funktioiden lineaarinen riippumattomuus on käsite, joka tulee käyttöön mm. lineaaristen differentiaaliyhtälöiden teoriassa. Tämä määritellään seuraavasti:

**Määritelmä.** Funktiot  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  ovat lineaarisesti riippumattomia, jos yhtälö

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k y_k(x) = 0 \quad \text{eli} \quad \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) = 0$$

on voimassa kaikilla (tarkasteluväliin kuuluvilla) muuttujan  $x$  arvoilla ainoastaan siinä tapauksessa, että  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ .

Jos yhtälö toteutuu kaikilla muuttujan  $x$  arvoilla siten, että yksikin luvuista  $\lambda_k$  on  $\neq 0$ , funktiot ovat lineaarisesti riippuvia.

Jos erityisesti jokin funktioista  $y_k(x)$  on nollafunktio, ts.  $= 0$  kaikilla  $x$ , voidaan tätä vastaava kerroin  $\lambda_k$  valita nollassa eroavaksi, ja funktiot ovat siis lineaarisesti riippuvia.

Yhtälöä  $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) = 0$  on ajateltava testiyhtälönä, joka on voimassa kaikilla muuttujan  $x$  arvoilla ja josta pyritään ratkaisemaan luvut  $\lambda_k$ . Ratkaisuksi kelpaa aina, että kaikki luvut  $\lambda_k$  ovat  $= 0$ , mutta tämä ei ratkaise lineaarista riippuvuutta tai riippumattomuutta. Oleellista on, löytyykö muita ratkaisuja. Jos ei, niin funktiot ovat lineaarisesti riippumattomat. Jos löytyy, niin ne ovat lineaarisesti riippuvat.

Jos funktiot ovat lineaarisesti riippuvia, on ainakin yksi kerroin  $\neq 0$ ; olkoon esimerkiksi  $\lambda_p \neq 0$ . Tällöin testiyhtälöstä voidaan ratkaista funktio  $y_p(x)$ :

$$y_p(x) = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^n \frac{\lambda_k}{\lambda_p} y_k(x).$$

Kahden funktion tapauksessa tämä merkitsee, että toinen on sama kuin toinen vakiolla kerrottuna: Jos  $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2(x) = 0$  kaikilla  $x$  ja  $\lambda_1 \neq 0$ , niin

$$y_1(x) = \mu y_2(x), \quad \text{missä } \mu = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

## Linkkejä

[lineaarisesti riippumattomat ja lineaarisesti riippuvat funktiot, esimerkki](#)  
[homogeeniyhtälön lineaarisesti riippumattomat perusratkaisut](#)