Epähomogeeninen vakiokertoiminen lineaariyhtälö

Epähomogeenista vakiokertoimista differentiaaliyhtälöä

$$y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = e^{-x} + \sin 5x$$

vastaava homogeeniyhtälö on

$$y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0.$$

Kun tämä ratkaistaan yritteellä $y = e^{rx}$ päädytään karakteristiseen yhtälöön $r^4 + 4r^3 + 6r^2 + 4r + 1 = 0$, jolla on nelinkertainen juuri $r = -1$. Homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on siten

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x} + C_4 x^3 e^{-x}.$$

Epähomogeeniyhtälön yksittäisratkaisua haettaessa voidaan termit e^{-x} ja $\sin 5x$ käsitellä erikseen. Jos nimittäin y_1 on differentiaaliyhtälön $\mathrm{L}y = R_1$ ratkaisu ja y_2 on differentiaaliyhtälön $\mathrm{L}y = R_2$ ratkaisu, ts. $\mathrm{L}y_1 = R_1$ ja $\mathrm{L}y_2 = R_2$, niin on myös $\mathrm{L}y_1 + \mathrm{L}y_2 = R_1 + R_2$ eli $\mathrm{L}(y_1 + y_2) = R_1 + R_2$. Tällöin $y_1 + y_2$ on yksittäisratkaisu sille yhtälölle, jonka oikeana puolena on summa $R_1 + R_2$.

Koska e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x} ja x^3e^{-x} ovat homogeeniyhtälön ratkaisuja, on yhtälön

$$y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = e^{-x}$$

yksittäisratkaisua etsittävä yritteellä $y = Ax^4e^{-x}$. Tämän sijoittaminen differentiaaliyhtälöön antaa $(24A - 1)e^{-x} = 0$, jolloin tulee olla $A = 1/24$.

Yhtälön

$$y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = \sin 5x$$

yksittäisratkaisu voidaan löytää yritteellä $y = A\sin 5x + B\cos 5x$. Tämän sijoittaminen yhtälöön antaa $(476a + 480b)\sin 5x + (-480a + 476b)\cos 5x = \sin 5x$, jolloin tulee olla

$$\begin{cases} 476a + 480b = 1, \\ -480a + 476b = 0. \end{cases}$$

Tällöin $a = 119/114244$, $b = 30/28561$.

Kaikkiaan saadaan epähomogeenisen yhtälön yleiseksi ratkaisuksi

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x} + C_4 x^3 e^{-x} + \tfrac{1}{24} x^4 e^{-x} + \tfrac{119}{114244}\sin 5x + \tfrac{30}{28561}\cos 5x.$$

Linkkejä

vakiokertoiminen epähomogeeninen yhtälö
lineaarisen differentiaaliyhtälön operaattorimuoto

Simo K. Kivelä 26.04.2001