Homogeeninen vakiokertoiminen lineaariyhtälö

1) Viidettä kertalukua oleva vakiokertoiminen homogeeniyhtälö

$$y^{(5)} - 9y^{(4)} + 7y''' + 77y'' - 144y' - 364y = 0$$

ratkaistaan luontevimmin yritteellä $y = e^{rx}$. Kun tämä sijoitetaan yhtälöön saadaan

$$(r^5 - 9r^4 + 7r^3 + 77r^2 - 144r - 364)e^{rx} = 0.$$

Koska eksponenttitekijä voidaan jakaa pois, saadaan luvulle r viidennen asteen karakteristinen yhtälö

$$r^5 - 9r^4 + 7r^3 + 77r^2 - 144r - 364 = 0,$$

jonka juuret ovat $r_1 = -2$, $r_2 = -2$, $r_3 = 3 + 2i$, $r_4 = 3 - 2i$, $r_5 = 7$.

Yleisessä tapauksessa yhtälön algebrallinen ratkaiseminen ei välttämättä onnistu. Tällöin juurille voidaan etsiä likiarvot numeerisilla menettelyillä, mutta tämä luonnollisesti johtaa epätarkkuuteen differentiaaliyhtälön ratkaisussa. Kvalitatiivisesti ratkaisun käyttäytymistä päästään kyllä tällöinkin tutkimaan.

Kutakin karakteristisen yhtälön juurta kohden voidaan muodostaa lineaarisesti riippumattomaan perusjärjestelmään kuuluva ratkaisu:

Koska $r_5 = 7$ on yksinkertainen juuri, on vastaava perusratkaisu $y_5 = e^{7x}$.

Vastaavalla tavalla juurta $r_1 = -2$ vastaa perusratkaisu $y_1 = e^{-2x}$. Kyseessä on kuitenkin kaksinkertainen juuri, jolloin sitä vastaamaan tarvitaan myös toinen perusratkaisu. Tämä saadaan lisäämällä muuttujan x ensimmäinen potenssi kertoimeksi: $y_2 = xe^{-2x}$. Jos kyseessä olisi kolminkertainen juuri, olisi kolmannessa perusratkaisussa muuttujan x toinen potenssi: x^2e^{-2x} jne.

Kompleksista juuriparia $r_3 = 3 + 2i$, $r_4 = 3 - 2i$ vastaisivat oikeastaan lineaarisesti riippumattomat kompleksiset ratkaisut $e^{(3+2i)x}$ ja $e^{(3-2i)x}$, mutta näiden sijaan voidaan ottaa reaaliset muodot $y_3 = e^{3x}\sin(2x)$, $y_4 = e^{3x}\cos(2x)$.

Differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on perusratkaisujen lineaariyhdistely:

$$y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + C_3e^{3x}\sin(2x) + C_4e^{3x}\cos(2x) + C_5e^{7x}.$$

2) Differentiaaliyhtälön

$$y^{(4)} - 4y''' + 14y'' - 20y' + 25y = 0$$

tapauksessa karakteristisella yhtälöllä

$$r^4 - 4r^3 + 14r^2 - 20r + 25 = 0$$

on kaksinkertainen kompleksinen ratkaisu: $r_1 = r_2 = 1 + 2i$, $r_3 = r_4 = 1 - 2i$.

Kompleksisessa muodossa perusratkaisut olisivat tällöin e^{r_1x}, e^{r_3x}, xe^{r_1x}, xe^{r_3x}, mutta näitä vastaavat reaaliset ratkaisut $e^x\sin(2x)$, $e^x\cos(2x)$, $xe^x\sin(2x)$, $xe^x\cos(2x)$.

Yleinen ratkaisu on siten

$$y = C_1e^x\sin(2x) + C_2e^x\cos(2x) + C_3xe^x\sin(2x) + C_4xe^x\cos(2x).$$

Linkkejä

vakiokertoiminen homogeeniyhtälö

Simo K. Kivelä 26.04.2001