Wronskin determinantti

Toisen kertaluvun lineaarisen ja homogeenisen differentiaaliyhtälön ratkaisuista y_1, y_2 ja niiden derivaatoista muodostettu determinantti

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$$

on yhtälön *Wronskin determinantti* (puolalais-ranskalaisen matematikon Josef Maria Hoëné Wronskin mukaan; 1778 – 1853).

Korkeampien kertalukujen yhtälöiden Wronskin determinantit muodostetaan samankaltaisella tavalla. Jos kertaluku on n, determinantti on

$$W(y_1,y_2,\dots,y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Tämä voidaan laskea kuten mikä tahansa determinantti kehittämällä jonkin vaaka- tai pystyrivin mukaan, jolloin saadaan lineaariyhdistely $n-1$-rivisistä determinanteista. Esimerkiksi j:nnen vaakarivin mukaan kehitettäessä saataisiin

$$W(y_1,y_2,\dots,y_n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}y_k^{(j-1)}W_{jk},$$

missä W_{jk} tarkoittaa $(n-1)$-rivistä determinanttia, joka saadaan alkuperäisestä poistamalla j:s vaaka- ja k:s pystyrivi. Jokainen determinantti W_{jk} kehitetään vastaavalla tavalla lineaariyhdistelyksi $(n-2)$-rivisiä determinantteja jne., kunnes päädytään kaksirivisiin determinantteihin, jotka lasketaan kuten alussa on osoitettu.

Wronskin determinantin merkitys lineaaristen differentiaaliyhtälöiden teoriassa perustuu siihen, että se totetuttaa differentiaaliyhtälön $W' + P_{n-1}(x)W = 0$, missä P_{n-1} on normaalimuodossa olevan differentiaaliyhtälön kertalukua $n-1$ olevan derivaatan kerroinfunktio. Tästä voidaan ratkaista Wronskin deteminantti, ilman että ratkaisuja y_k on tarpeen tuntea:

$$W(y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)) = Ce^{-\int P_{n-1}(x)\,dx}.$$

Lausekkeesta näkyy, että Wronskin determinantti ei muuta merkkiään, jos normaalimuotoisen differentiaaliyhtälön kerroinfunktiot ovat jatkuvia. Minkä merkkinen determinantti on tai onko se $=0$, riippuu vakiosta C eli siitä, mitkä ratkaisut $y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n$ ovat kysymyksessä. Tärkein Wronskin determinanttia koskeva lause on seuraava:

Lause. *Wronskin determinantti on* $=0$ *(ts.* $C=0$*), jos ja vain jos homogeeniyhtälön ratkaisut* $y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n$ *ovat lineaarisesti riippuvia.*

Monia muitakin lineaarisen differentiaaliyhtälön ratkaisuja koskevia lauseita voidaan todistaa Wronskin determinanttiin pohjautuen.

Linkkejä

lineaariyhtälö ja sen normaalimuoto
homogeeninen lineaariyhtälö

lineaarinen riippumattomuus
Wronskin determinantin differentiaaliyhtälön johtaminen symbolista ohjelmaa käyttäen / mma
Wronskin determinantin differentiaaliyhtälön johtaminen symbolista ohjelmaa käyttäen / mpl

Simo K. Kivelä 29.03.2001