Lineaariyhtälön käsite

Jos kertalukua n oleva differentiaaliyhtälö on muotoa

$$P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_1(x)y' + P_0(x)y = R(x),$$

sitä kutsutaan *lineaariseksi differentiaaliyhtälöksi*. Yhtälön vasempana puolena on derivaattojen *lineaariyhdistely* kertoimina muuttujan x funktiot $P_k(x)$.

Jos yhtälö jaetaan korkeimman kertaluvun derivaatan kertoimella $P_n(x)$, se saadaan *normaalimuotoon*. Lineaarisia differentiaaliyhtälöitä käsitellään usein tässä muodossa.

Jos $R(x) = 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla, yhtälö on *homogeeninen*. Jos näin ei ole, se on *epähomogeeninen*.

Esimerkiksi ensimmäisen kertaluvun lineaarinen ja epähomogeeninen differentiaaliyhtälö on muotoa $P_1(x)y' + P_0(x)y = R(x)$, kolmannen kertaluvun normaalimuotoon saatettu homogeeniyhtälö on $y''' + P_2(x)y'' + P_1(x)y' + P_0(x)y = 0$.

Lineaarinen differentiaaliyhtälö voidaan esittää lyhyemmin ottamalla käyttöön *differentiaalioperaattori*

$$\mathrm{L} = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)\mathrm{D}^k,$$

missä D on tavallinen derivointioperaattori ja sen potenssit tarkoittavat derivointia useampaan kertaan: esimerkiksi $\mathrm{D}y = y'$, $\mathrm{D}^3y = y'''$. Operaattorin nollas potenssi on identiteettioperaattori, ts. sillä operointi ei vaikuta mitään: $\mathrm{D}^0y = y$. Operaattoria L käyttäen lineaarinen differentiaaliyhtälö saa yksinkertaisen muodon

$$\mathrm{L}y = R.$$

Operaattori L on ns. *lineaarikuvaus*, ts. sillä on ominaisuudet

$$\mathrm{L}(y_1 + y_2) = \mathrm{L}y_1 + \mathrm{L}y_2, \qquad \mathrm{L}(\alpha y) = \alpha \mathrm{L}y,$$

missä y, y_1 ja y_2 ovat mitä tahansa riittävän monta kertaa derivoituvia funktioita ja α on vakio. Ominaisuudet ovat perusteltavissa derivoinnin alkeisominaisuuksilla: summa derivoidaan termeittäin, funktion vakiolla kertomisen ja derivoinnin järjestyksen saa vaihtaa.

Linkkejä

normaalimuoto

Simo K. Kivelä 29.03.2001