

Algebrallinen näkökulma

Algebralliselta kannalta katsottuna differentiaaliyhtälön ratkaiseminen on lausekkeiden manipuloitua ja integrointi- tai derivointisääntöjen soveltamista.

Tällöin yhtälö sen tyyppistä riippuen muokataan ensin sopivaan muotoon siirtämällä termejä puolelta toiselle, kertomalla tai jakamalla sopivalla lausekkeella, muodostamalla osamurtokehiteelmä tms. Tavoitteena on saada se muotoon, missä voidaan soveltaa alkeisfunktioiden integrointisääntöjä.

Toinen usein kyseeseen tuleva menettely on ns. *yritteen* käyttäminen: Arvataan ratkaisun muoto, mutta arvauksessa esiintyy vielä tuntemattomia vakioita tai funktioita. Arvaus eli yrite sijoitetaan yhtälöön ja vaaditaan, että se toteutuu, jolloin saadaan tuntemattomille vakioille ja funktioille yhtälö tai yhtälöt. Nämä voivat tilanteesta riippuen olla differentiaaliyhtälöitä tai algebrallisia yhtälöitä. Tavoitteena on, että ne ovat alkuperäistä yhtälöä yksinkertaisempia.

Jos menettelyissä onnistutaan, saadaan differentiaaliyhtälölle ainakin jokin ratkaisu, usein myös yleinen ratkaisu.

Ratkaiseminen tällä tavoin ei kuitenkaan läheskään aina onnistu. On helppoa esittää differentiaaliyhtälöitä, joiden ratkaisuja ei edes voida lausua *tavallisten alkeisfunktioiden* (potenssit, polynomit, eksponenttifunktio, logaritmi, trigonometriset funktiot käänteisfunktioineen, hyperboliset funktiot käänteisfunktioineen) avulla tai edes tätä laajemman funktioluokan, ns. *erikoisfunktioiden* (hypergeometriset funktiot, Besselin funktiot, Airyn funktiot jne.) avulla.

Differentiaaliyhtälö voidaan myös yrittää ratkaista etsimällä ratkaisulle *sarjakehitelmä*.

Algebralliset ratkaisumenettelyt voidaan ohjelmoida ja tällaisina ne ovat käytettävissä symbolisissa laskentaohjelmissa. Näissä käytettävät algoritmit ovat erilaisia ja tehokkaampia kuin perinteiset käsinlaskennan algoritmit.

Kysymys differentiaaliyhtälön *ratkaisun olemassaolosta* on eri asia kuin kysymys yhtälön ratkaisemisesta algebrallisilla operaatioilla. Ratkaisun sanotaan olevan olemassa, jos on olemassa jokin funktio, joka toteuttaa yhtälön; tätä ei lainkaan välttämättä voida lausua alkeisfunktioiden tai erikoisfunktioiden avulla.

Linkkejä

[ratkaiseminen algebrallisesti](#)

[ratkaiseminen sarjojen avulla](#)

[ratkaiseminen symbolisella ohjelmalla algebrallisesti / mma](#)

[ratkaiseminen symbolisella ohjelmalla algebrallisesti / mpl](#)

Simo K. Kivelä 27.03.2001