

Faasiavaruus

Normaalimuotoinen kertalukua n oleva differentiaaliyhtälöryhmä — esimerkiksi kertalukua n olevaa yhtälöä vastaava normaaliryhmä — on

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, \dots, y_n), \\ \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, \dots, y_n). \end{cases}$$

Tämän ratkaisu muodostuu n funktiosta $y_1(t), \dots, y_n(t)$. Näiden voidaan katsoa määrittelevän käyrän n -ulotteisessa avaruudessa: jokaista riippumattoman muuttujan arvoa t vastaa käyrän piste, jonka koordinaatit ovat $(y_1(t), \dots, y_n(t))$. Avaruuden koordinaattiakseleilla ovat siis funktioiden y_k arvot ja muuttuja t on käyräparametrin asemassa. Kyseessä on ratkaisun esitys *faasiavaruudessa*.

Jos yhtälöryhmä on autonominen, ts. muotoa

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, \dots, y_n), \\ \vdots \\ y_n' = f_n(y_1, \dots, y_n), \end{cases}$$

voidaan käyrän tangenttivektori laskea suoraan differentiaaliyhtälöryhmästä:

$$(y_1'(t), \dots, y_n'(t)) = (f_1(y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(y_1, \dots, y_n)).$$

Faasiavaruuteen muodostuu siis suuntakenttä.

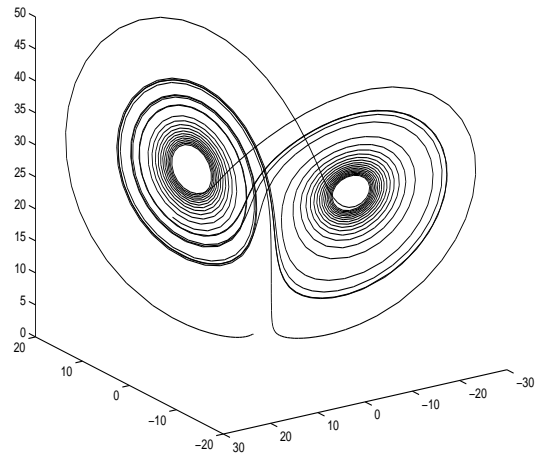
Jos $n = 3$, on yhtälöitä ja tuntemattomia funktioita kolme. Faasiavaruus on siis kolmiulotteinen ja ratkaisukäyrästä $(y_1(t), y_2(t), y_3(t))$ voidaan piirtää kuvia projisioimalla kolmiulotteinen avaruus jollakin tavoin kaksiulotteiseen tasoon. Kyseessä voi olla projektio johonkin koordinaattitasoon tai ns. aksonometrinen kuva, projektio johonkin vinossa asennossa olevaan tasoon.

Jos $n > 3$, tilanne on periaatteessa samankaltainen, mutta faasiavaruuden projektiot kaksiulotteiseen tasoon kadottavat enemmän tietoa n -ulotteisen avaruuden tilanteesta. Luonnollisinta onkin tyytyä johonkin koordinaattitasoon otettuun projektiioon. Esimerkiksi projektio y_1y_2 -tasoon saadaan tarkastelemalla vain kahta ensimmäistä funktiota: $(y_1(t), y_2(t))$.

Esimerkkinä on aksonometrinen kuva *Lorenzin systeemin*

$$\begin{cases} y_1' = 10(y_2 - y_1), \\ y_2' = 28y_1 - y_2 - y_1y_3, \\ y_3' = y_1y_2 - \frac{8}{3}y_3 \end{cases}$$

eräästä ratkaisukäyrästä kolmiulotteisessa faasiavaruudessa:



Linkkejä

[differentiaaliyhtälöryhmä](#)
[autonominen yhtälö ja yhtälöryhmä](#)
[normaaliryhmä](#)
[faasitaso](#)

Simo K. Kivelä 27.03.2001