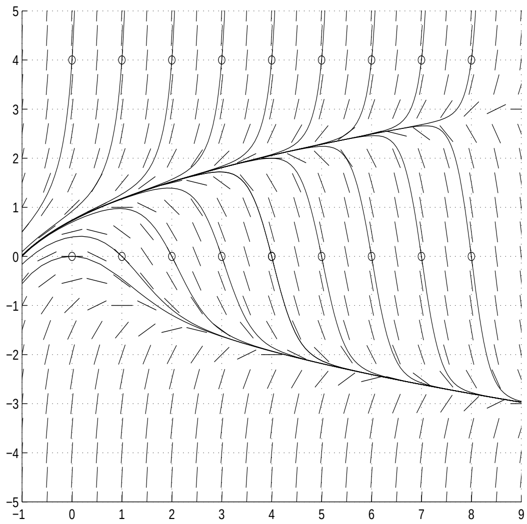
Kvalitatiivinen näkökulma

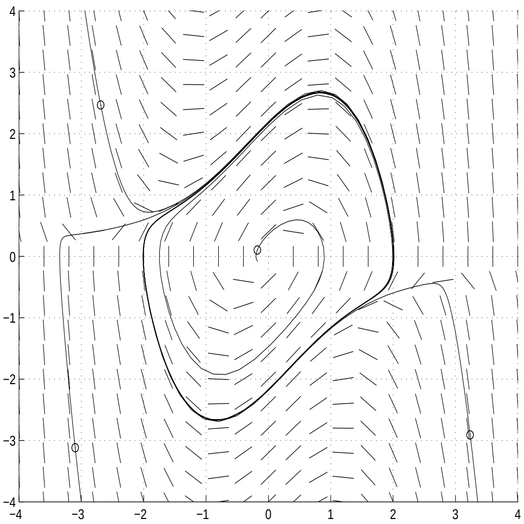
Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälön $y' = f(x,y)$ suuntakenttä xy-tasossa tai toisen kertaluvun autonomisen yhtälön suuntakenttä faasitasossa antavat mahdollisuuden tarkastella ratkaisujen *kvalitatiivisia* ominaisuuksia ilman, että yhtälöä on tarpeen ratkaista. Vastaavanlaisia ilmiöitä esiintyy korkeampien kertalukujen yhtälöillä, mutta graafinen tarkastelu ei ole yhtä yksinkertaista.

Alla oleva vasemmanpuoleinen kuvio esittää eräitä yhtälön $y' = y^2 - x$ ratkaisukäyriä suuntakenttään piirrettyinä. Kuvioon hahmottuu kaksi erikoisasemassa olevaa ratkaisukäyrää:

Ylemmästä pyrkivät kaikki muut ratkaisukäyrät loitontumaan, kun x kasvaa (ts. siirrytään vasemmalta oikealle). Jos käyrän päälle asetetaan kapea nauha, kaikki muut ratkaisut siirtyvät tämän nauhan ulkopuolelle ennemmin tai myöhemmin. Poikkeuksena on yksi ratkaisu: kyseinen käyrä itse.

Alempana on vastaavasti käyrä, jota kaikki ylemmän käyrän alapuolella olevat yhtälön ratkaisut asymptoottisesti lähestyvät, kun $x \to \infty$. Jos tämän käyrän päälle asetetaan miten kapea nauha tahansa, muut ratkaisut siirtyvät sen alle ennemmin tai myöhemmin.





Oikeanpuoleinen kuvio esittää *van der Polin differentiaaliyhtälön* $y'' - (1-y^2)y' + y = 0$ ratkaisuja faasitasossa (vaaka-akselilla y, pystyakselilla y'). Kaikki ratkaisut (lukuunottamatta tapausta $y(x) = 0$ kaikilla x) lähestyvät tiettyä umpinaista käyrää, kun $x \to \infty$.

Linkkejä

suuntakenttä
faasitaso
faasiavaruus
van der Polin yhtälö / mma
van der Polin yhtälö / mpl

Simo K. Kivelä 27.03.2001