Eulerin menetelmä

Alkuarvoprobleeman

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

ratkaisun ensimmäisen asteen Taylorin kehitelmä pisteessä x_k on

$$\begin{aligned} y(x_k+h) &= y(x_k) + hy'(x_k) + O(h^2) \\ &= y(x_k) + hf(x_k, y(x_k)) + O(h^2). \end{aligned}$$

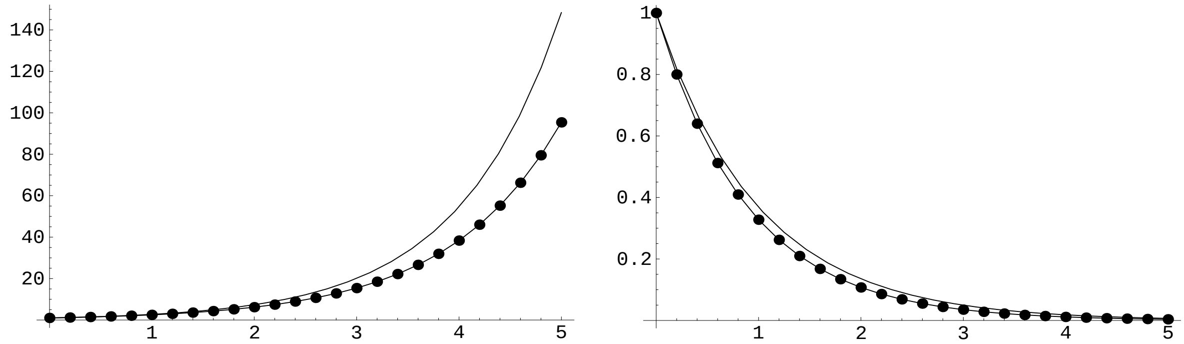
Kun tästä jätetään jäännöstermi pois ja funktion y arvot korvataan niiden approksimaatioilla, saadaan *Eulerin menetelmän* iteraatiokaava:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k).$$

Numeerinen ratkaiseminen tapahtuu valitsemalla sopiva askelpituus h ja soveltamalla iteraatiokaavaa ensimmäisen kerran indeksillä $k = 0$, jolloin oikealle puolelle sijoitetaan alkuehdossa olevat arvot ja saadaan lasketuksi y_1. Tämä on approksimaatio ratkaisufunktion arvolle pisteessä $x_1 = x_0 + h$. Tämän jälkeen askel toistetaan arvolla $k = 1$ yleensä samaa askelpituutta h käyttäen, ja saadaan y_2, joka approksimoi ratkaisufunktion arvoa pisteessä $x_2 = x_1 + h$, jne.

Koska $f(x_k, y_k) = y'(x_k)$ on ratkaisufunktion kulmakerroin pisteessä x_k, Eulerin menetelmässä edetään pisteestä (x_k, y_k) ratkaisukäyrän tangentin suuntaan. Tästä aiheutuu luonnollisesti virhe, joka yleensä on sitä suurempi, mitä pitempää askelpituutta h käytetään. Differentiaaliyhtälön luonteesta riippuu, kumuloituvatko virheet useammassa askelessa vai eivät.

Oheiset kuvat esittävät alkuarvoprobleemojen $y' = y,\ y(0) = 1$ ja $y' = -y,\ y(0) = 1$ tarkkoja ratkaisuja ja niiden Eulerin menetelmän mukaisia approksimaatioita suhteellisen suurta askelpituutta $h = 0.2$ käytettäessä. Edellisessä tapauksessa virheet kumuloituvat, jälkimmäisessä alun kumuloitumisen jälkeen virhe katoaa.



Eulerin menetelmä voidaan johtaa myös integroimalla differentiaaliyhtälö välin $[x_k, x_{k+1}]$ yli:

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))\, dx.$$

Kun integraalin approksimaatioksi otetaan välin pituuden h ja välin alkupisteessä lasketun funktion arvon $f(x_k, y(x_k))$ tulo, päädytään samaan iteraatiokaavaan kuin edellä.

Linkkejä

numeerisen ratkaisemisen perusidea
alkuarvoprobleeman numeerinen ratkaiseminen, esimerkki / mma
Airyn yhtälön numeerinen ratkaiseminen, esimerkki / mma
alkuarvoprobleeman numeerinen ratkaiseminen, esimerkki / mpl
Airyn yhtälön numeerinen ratkaiseminen, esimerkki / mpl

Simo K. Kivelä   10.4.2001