

# Parannettu Eulerin menetelmä

Integroimalla differentiaaliyhtälö  $y' = f(x, y(x))$  puolittain välin  $[x_k, x_{k+1}]$  yli saadaan

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx.$$

Kun funktion  $y$  arvot korvataan niiden approksimaatioilla ja integraalin arvioimiseen käytetään puolisuunnikkasääntöä, päädytään kaavaan

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}h [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})].$$

Tämä ei suoranaisesti anna mahdollisuutta differentiaaliyhtälön numeeriseen ratkaisemiseen, koska  $y_{k+1}$  esiintyy myös kaavan oikealla puolella.

Kaavaa voidaan kuitenkin soveltaa siten, että arvolle  $y_{k+1}$  lasketaan ensin karkeampi approksimaatio tavallisella Eulerin menetelmällä ja tätä käytetään eo. kaavan oikealla puolella. Kaavaa käytetään siis karkean arvon tarkentamiseen.

Laskeminen tapahtuu kahdessa vaiheessa:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{k+1} &= y_k + hf(x_k, y_k), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{1}{2}h [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})].\end{aligned}$$

Edellistä kaavaa kutsutaan *ennustajaksi* ja jälkimmäistä *korjaajaksi*. Menetelmän nimenä on *parannettu Eulerin menetelmä* tai myös *Heunin menetelmä*. Voidaan osoittaa, että se on jossain määrin tarkempi kuin tavallinen Eulerin menetelmä. Kumpikaan ei kuitenkaan ole käyttökelpoinen todellisissa ongelmissa.

Parannettu Eulerin menetelmä voidaan johtaa myös Taylorin kaavan avulla. Alkuarvoprobeelman

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

ratkaisun toisen asteen Taylorin kehitelmä pisteessä  $x_k$  on

$$\begin{aligned}y(x_k + h) &= y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{1}{2}y''(x_k)h^2 + O(h^3) \\ &= y(x_k) + \left[ hf(x_k, y(x_k)) + \frac{1}{2}h^2 (f_x(x_k, y(x_k)) + f_y(x_k, y(x_k))f(x_k, y(x_k))) \right] + O(h^3).\end{aligned}$$

On mahdollista (vaikka ei aivan yksinkertaista) osoittaa, että hakasulkulauseketta voidaan tarkkuutta menettämättä approksimoida lausekkeella

$$\frac{1}{2}h [f(x_k, y(x_k)) + f(x_k + h, y(x_k) + hf(x_k, y(x_k)))].$$

Tämä johtaa samaan kaksivaiheiseen kaavaan kuin edellä.

## Linkkejä

[numeerisen ratkaisemisen perusidea](#)

[tavallinen Eulerin menetelmä](#)

[alkuarvoprobeelman numeerinen ratkaiseminen, esimerkki / mma](#)

[Airyn yhtälön numeerinen ratkaiseminen, esimerkki / mma](#)

[alkuarvoprobeelman numeerinen ratkaiseminen, esimerkki / mpl](#)

[Airyn yhtälön numeerinen ratkaiseminen, esimerkki / mpl](#)