Numeerinen ratkaiseminen: perusidea toisen tai korkeamman kertaluvun yhtälölle

Toista tai korkeampaa kertalukua olevan differentiaaliyhtälöryhmän numeerinen ratkaiseminen perustuu vastaavan normaaliryhmän tarkasteluun. Tällöin on oleellista, että kyseessä on normaalimuotoinen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmä alkuehtoineen, ei se, että kyseessä on korkeamman kertaluvun yhtälöstä syntynyt normaaliryhmä.

Olkoon tarkastelun kohteena siis normaalimuotoinen ryhmä

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \quad \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

alkuehtona $y_1(x_0) = y_1^{(0)}, y_2(x_0) = y_2^{(0)}, \ldots, y_n(x_0) = y_n^{(0)}$.
Vektorimuodossa tämä on

$$Y' = F(x, Y), \quad Y(x_0) = Y^{(0)},$$

missä

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad Y^{(0)} = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ \vdots \\ y_n^{(0)} \end{pmatrix}, \quad F(x, Y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{pmatrix}.$$

Funktioille y_j voidaan muodostaa Taylorin kehitelmät samalla tavoin kuin ensimmäisen kertaluvun yhtälöä tarkasteltaessa: derivaattojen laskemiseksi ryhmän jokaista yhtälöä on derivoitava muuttujan x suhteen. Approksimoitaessa lausekkeita saadaan jokaiselle funktiolle y_j erikseen muotoa

$$y_j^{(k+1)} = y_j^{(k)} + g_j(x_k, Y^{(0)}, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(k)}, h)$$

oleva kaava funktionarvon $y_j(x_{k+1})$ approksimaation $y_j^{(k+1)}$ laskemiseen. (Huomaa: Suluissa oleva yläindeksi (k) viittaa pisteessä x_k laskettuun approksimaatioon. Kyseessä ei ole derivaatan kertaluku.)

Kaavat voidaan yhdistää vektorimuotoon:

$$Y^{(k+1)} = Y^{(k)} + G(x_k, Y^{(0)}, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(k)}, h).$$

Vektorimuotoinen yhtälö $Y' = F(x, Y)$ voidaan myös integroida puolittain integroimalla jokainen komponenttiyhtälö erikseen. Täsmälleen samalla tavalla kuin yhden yhtälön tapauksessa tämä johtaa laskentakaavaan

$$Y^{(k+1)} = Y^{(k)} + I(x_k, Y^{(0)}, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(k)}, h).$$

Ainoana erona on, että funktio I on vektoriarvoinen funktio.

Linkkejä

numeerinen näkökulma
perusidea ensimmäisen kertaluvun yhtälölle
differentiaaliyhtälöryhmä
korkeamman kertaluvun yhtälöä vastaava normaaliryhmä
Airyn differentiaaliyhtälön numeerinen ratkaiseminen / mma
Airyn differentiaaliyhtälön numeerinen ratkaiseminen / mpl

Simo K. Kivelä 29.03.2001