Numeerinen ratkaiseminen: perusidea ensimmäisen kertaluvun yhtälölle

Ensimmäisen kertaluvun alkuarvoprobleeman

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

numeerisessa ratkaisemisessa tarkasteluvälille $[x_0, x_0 + L]$ asetetaan jakopisteet x_0, x_1, $\ldots$, x_n, missä $x_n = x_0 + L$, ja pyritään laskemaan funktionarvoille $y(x_k)$ approksimaatiot y_k.

Jakopisteet x_k ovat usein tasavälisiä, $x_{k+1} = x_k + h$, mutta välttämätöntä tämä ei ole. Yleensä on $L > 0$, mutta voi myös olla $L < 0$, jolloin väli ulottuu alkuehtopisteestä x_0 taaksepäin. Tällöin on $h < 0$.

Approksimaatiot y_k voidaan laskea useilla erilaisilla menetelmillä. Nämä ovat iteratiivisia, ts. seuraava arvo y_{k+1} lasketaan aiemmin laskettujen arvojen y_0, y_1, $\ldots$, y_k avulla. Menetelmien perustana on yleensä jompikumpi seuraavista lähestymistavoista:

1) Oletetaan, että ratkaisufunktiolla $y(x)$ on Taylorin kehitelmä jakopisteessä x_k:

$$\begin{aligned} y(x_k + h) &= y(x_k) + y'(x_k)h + \tfrac{1}{2}y''(x_k)h^2 + \cdots + \tfrac{1}{n!}y^{(n)}(x_k)h^n + O(h^{n+1}) \\ &= y(x_k) + \left[y'(x_k)h + \tfrac{1}{2}y''(x_k)h^2 + \cdots + \tfrac{1}{n!}y^{(n)}(x_k)h^n\right] + O(h^{n+1}), \end{aligned}$$

missä $O(h^{n+1})$ tarkoittaa astetta n olevaan Taylorin polynomiin liittyvää jäännöstermiä.

Hakasulkulauseke voidaan laskea, kun x_k ja $y(x_k)$ tunnetaan: Differentiaaliyhtälön mukaan on $y' = f(x,y)$, jolloin $y'(x_k) = f(x_k, y(x_k))$. Derivaatta $y''(x_k)$ saadaan derivoimalla differentiaaliyhtälö muuttujan x suhteen, jolloin

$$y''(x) = f_x(x,y(x)) + f_y(x,y(x))y'(x) = f_x(x,y(x)) + f_y(x,y(x))\,f(x,y(x)),$$

ja sijoittamalla tähän $x = x_k$. Tässä f_x ja f_y tarkoittavat funktion f osittaisderivaattoja. Korkeammat derivaatat saadaan vastaavalla tavalla derivoimalla edellä saatua yhtälöä edelleen. Lausekkeet käyvät kuitenkin varsin mutkikkaiksi.

Kiinnittämällä Taylorin polynomin aste n, pudottamalla jäännöstermi pois ja käyttämällä funktionarvolle $y(x_k)$ sille aiemmin laskettua approksimaatiota y_k saadaan menetelmä funktionarvon $y(x_{k+1}) = y(x_k + h)$ approksimaation laskemiseen:

$$y(x_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_k + g(x_k, y_0, y_1, \ldots, y_k, h).$$

Tässä $g(x_k, y_0, y_1, \ldots, y_k, h)$ tarkoittaa joko edellä käsitellystä hakasulkulauseketta saatavaa termiä tai sille jollakin tavalla muodostettua, helpommin laskettavaa approksimaatiota. Approksimaatio voi perustua funktion f osittaisderivaattojen sijasta yhteen tai useampaan jo laskettuun arvoon y_0, y_1, $\ldots$, y_k.

2) Integroimalla differentiaaliyhtälö $y'(x) = f(x,y(x))$ puolittain välin $[x_k, x_k + h]$ yli saadaan

$$y(x_k + h) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_k+h} f(x,y(x))\,dx.$$

Oikean puolen integraalia ei kuitenkaan voida laskea, koska funktiota $y(x)$ ei tunneta.

Approksimoimalla funktiota $f(x,y(x))$ jollakin tavoin välillä $[x_k, x_k + h]$, voidaan integraalille laskea likimääräisarvio $I(x_k, y_0, y_1, \ldots, y_k, h)$. Tämän perustana voidaan käyttää yhtä tai useampaa jo lasketuista arvoista y_0, y_1, …, y_k. Vastaavasti kuin edellä saadaan menetelmä funktionarvon $y(x_{k+1}) = y(x_k + h)$ approksimoimiseen:

$$y(x_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_k + I(x_k, y_0, y_1, \ldots, y_k, h).$$

Yksinkertaisia esimerkkejä em. ideoista ovat Eulerin menetelmä ja parannettu Eulerin menetelmä. Ne ovat kuitenkin liian epätarkkoja todellisissa ongelmissa. Käyttökelpoisia menetelmiä ovat esimerkiksi edelliseen lähestymistapaan perustuva Rungen – Kuttan menetelmä ja jälkimmäiseen perustuva Adamsin – Bashforthin menetelmä.

Linkkejä

numeerinen näkökulma
perusidea korkeamman kertaluvun yhtälölle
Eulerin menetelmä
parannettu Eulerin menetelmä
Rungen – Kuttan menetelmä
Adamsin – Bashforthin menetelmä
1. kertaluvun yhtälön numeerinen ratkaiseminen, esimerkki / mma
1. kertaluvun yhtälön numeerinen ratkaiseminen, esimerkki / mpl

Simo K. Kivelä 29.03.2001