Ratkaisun olemassaolo ja yksikäsitteisyys

Keskeinen kysymys alkuarvoprobleeman

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

tutkimisessa on, millä edellytyksillä probleemalla toisaalta on ratkaisu ja toisaalta näitä ei ole enempää kuin yksi. Ratkaisulla tarkoitetaan tällöin jossakin pisteen x_0 ympäristössä derivoituvaa, yhtälön ja alkuehdon toteuttavaa funktiota riippumatta siitä, onko tämä lausuttavissa alkeisfunktioiden avulla tai löydettävissä jollakin integrointimenettelyllä.

Ratkaisun olemassaoloa ja yksikäsitteisyyttä koskeva päätulos on seuraava:

Lause. *Funktio f ja sen osittaisderivaatta $\frac{\partial f}{\partial y}$ olkoot jatkuvia suorakulmiossa $\{(x,y) \mid |x-x_0| \leq a,\ |y-y_0| \leq b\}$. Tällöin on olemassa väli $]x_0-h, x_0+h[$ siten, että alkuarvoprobleemalla*

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $y(x)$ tällä välillä.

Väli $]x_0-h, x_0+h[$ on muuttujan x vaihteluvälin $[x_0-a, x_0+a]$ osaväli ja voi olla tätä huomattavastikin suppeampi.

Lauseen todistuksen pohjana on alkuarvoprobleemaa vastaavasta integraaliyhtälöstä

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx.$$

muodostettu rekursiokaava

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))\, dx.$$

Käyttämällä lähtöfunktiona esimerkiksi vakiofunktiota $y_0(x) = y_0$ (= alkuehdossa annettu arvo) muodostetaan rekursion avulla jono alkuehdon toteuttavia funktioita: $y_0(x),\ y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots.$ Tämä jono osoitetaan suppenevaksi, jolloin sillä on rajafunktio olemassa. Rajafunktion voidaan osoittaa toteuttavan sekä differentiaaliyhtälön että alkuehdon. Lopuksi on vielä osoitettava ratkaisun yksikäsitteisyys, ts. näytettävä, että jos sekä $y(x)$ että $z(x)$ ovat alkuarvoprobleeman ratkaisuja, nämä ovat samat.

Esitetyssä muodossa lause koskee vain ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä. Täysin vastaavalla tavalla voidaan kuitenkin todistaa kertalukua n olevan alkuarvoprobleeman ratkaisua koskeva lause, kun differentiaaliyhtälö korvataan vektorimuotoisella normaaliryhmällä $Y' = F(x,Y)$ ja alkuehto kirjoitetaan muotoon

$$Y(x_0) = \begin{pmatrix} y_0(x_0) \\ \vdots \\ y_{n-1}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = Y_0.$$

Todistukseen tarvitaan vain vähäisiä merkinnällisiä muutoksia, lähinnä itseisarvomerkkien korvaamisia vektorin normilla.

Lause esietään usein hieman vahvemmassa muodossa, jossa funktion f osittaisderivaatan $\frac{\partial f}{\partial y}$ olemassaoloa ei tarvitse olettaa. Tällöin oletetaan, että funktio f toteuttaa lauseessa mainitussa suorakulmiossa ns. *tasaisen Lipschitzin ehdon* $|f(x,y)-f(x,z)| \leq L|y-z|$, missä L on positiivinen vakio.

Tämän tyyppinen ehto on kuitenkin oleellinen: Vastaesimerkillä on mahdollista osoittaa, että lause ei päde, jos ehdosta luovutaan.

Linkkejä

alkuarvoprobleema, jonka ratkaisu ei ole yksikäsitteinen, esimerkki
alkuehto
normaaliryhmä
alkuarvoprobleemaa vastaava integraaliyhtälö

Simo K. Kivelä 27.03.2001