Autonominen yhtälö

Yleensä differentiaaliyhtälö riippuu *eksplisiittisesti* muuttujasta x, ts. tämä esiintyy yhtälössä muuallakin kuin tuntemattoman funktion ja sen derivaattojen argumenttina.

Kun yhtälö kirjoitetaan korkeimman kertaluvun derivaatan suhteen ratkaistuun normaalimuotoon, tämä ilmenee siten, että oikealla puolella olevalla funktiolla on argumenttina myös x:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Esimerkiksi kelpaa differentiaaliyhtälö $y''(x) + xy'(x) + x^2 y = 0$ eli $y'' = -xy' - x^2 y$, jolloin siis oikea puoli on $f(x, y, y') = -xy' - x^2 y$.

Jos yhtälö ei eksplisiittisesti riipu muuttujasta x, ts. x esiintyy vain tuntemattoman funktion argumenttina, yhtälöä kutsutaan *autonomiseksi*. Tällöin se on periaatteessa muotoa

$$y^{(n)} = f(y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}),$$

esimerkiksi $y''(x) + y'(x) + 2y = 0$ eli $y'' = -y' - 2y$.

Syynä nimitykseen on, että autonomisessa tapauksessa ratkaisu ei riipu siitä, miten muuttujan x origo (sovelluksissa ajan alkuhetki) on valittu. Tällöin ratkaisu on riippumaton siitä, annetaanko alkuehto pisteessä x_1 vai pisteessä x_2: käyttäytyminen alkuehtokohdasta oikealle (tai vasemmalle) on kummassakin tapauksessa samanlaista.

Vastaava pätee differentiaaliyhtälöryhmien suhteen: Kahden tuntemattoman funktion ja kahden yhtälön ryhmä normaalimuodossa on

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x), z(x)), \\ z'(x) = g(x, y(x), z(x)) \end{cases} \qquad \text{eli} \qquad \begin{cases} y' = f(x, y, z), \\ z' = g(x, y, z), \end{cases}$$

missä y ja z ovat tuntemattomat funktiot. Mikäli oikea puoli ei eksplisiittisesti riipukaan muuttujasta x, niin differentiaaliyhtälöryhmä on autonominen.

Esimerkiksi sopii *van der Polin yhtälöä* $y'' - \mu(1 - y^2)y' + y = 0$ (μ vakio) vastaava normaaliryhmä

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = \mu(1 - y^2)z - y. \end{cases}$$

Linkkejä

yhtälön normaalimuoto
differentiaaliyhtälöryhmä
korkeamman kertaluvun yhtälöä vastaava normaaliryhmä
faasitaso
faasiavaruus
tavallinen heiluri / mma
kaksoisheiluri / mma
van der Polin yhtälö / mma
peto- ja saaliskanta / mma
tavallinen heiluri / mpl

kaksoisheiluri / mpl
van der Polin yhtälö / mpl
peto- ja saaliskanta / mpl

Simo K. Kivelä   26.03.2001