Differentiaaliyhtälö

Differentiaaliyhtälöksi kutsutaan yhtälöä, jossa tuntemattomana on funktio ja joka sisältää tämän funktion derivaattoja. Yhtälön tulee olla voimassa kaikilla muuttujan arvoilla, jotka kuuluvat johonkin alueeseen, esimerkiksi koko reaaliakselille, jollekin sen avoimelle välille tms.

Jos tuntematon funktio on yhden muuttujan funktio, esimerkiksi $y(x)$, puhutaan *tavallisesta differentiaaliyhtälöstä*.

Esimerkkejä tavallisista differentiaaliyhtälöistä ovat

$$
\begin{array}{ll}
y' = \cos x, & x \in \mathbb{R}, \\
y'' + 4y = 0, & x \in \mathbb{R}, \\
x^2 y'' - xy' - y = 0, & x > 0, \\
y' = x^3 e^{-y}, & \text{missä on vaikeampi ilmaista aluetta, jossa ratkaisua haetaan.}
\end{array}
$$

Näissä muuttuja voidaan luonnollisesti kirjoittaa näkyviinkin: $y'(x) = \cos x$, $y''(x) + 4y(x) = 0$ jne.

Muuttujan symbolina voi x:n ohella olla mikä tahansa sopiva kirjain. Usein käytössä on t, jos taustana on sovellustehtävä, jossa riippumaton muuttuja tarkoittaa aikaa.

Tarkastelun kohteena voi olla myös *differentiaaliyhtälöryhmä*, jolloin yhtälöitä ja tuntemattomia funktioita on yhtä monta. Esimerkkinä olkoon taivaanmekaniikkaan liittyvä yhtälöryhmä

$$
\begin{cases}
x'' = -\dfrac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \\
y'' = -\dfrac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}},
\end{cases}
$$

missä tuntemattomat funktiot ovat $x(t)$ ja $y(t)$.

Jos tuntematon funktio on usean muuttujan funktio, esimerkiksi $u(x,y,z)$, kyseessä on *osittaisdifferentiaaliyhtälö*. Yhtälössä esiintyvät derivaatat ovat tällöin funktion u osittaisderivaattoja muuttujien (esimerkkitapauksessa x, y, z) suhteen. Yhtälön tulee olla voimassa jossakin sopivassa alueessa, esimerkiksi kolmiulotteisen avaruuden pallossa $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.

Tyypillinen esimerkki osittaisdifferentiaaliyhtälöstä on *Laplacen differentiaaliyhtälö*

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0,$$

missä alaindeksit viittaavat toisen kertaluvun osittaisderivaattoihin. Tätä voidaan myös merkitä

$$u_{xx}(x,y,z) + u_{yy}(x,y,z) + u_{zz}(x,y,z) = 0 \qquad \text{tai} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Osittaisdifferentiaaliyhtälöitä ei tässä enempää käsitellä.

Simo K. Kivelä 26.03.2001