Vakiokertoiminen lineaariyhtälö ja faasitasoesitys

Vakiokertoimisen homogeeniyhtälön $y'' + 2y' + y = 0$ karakteristinen yhtälö on $r^2 + 2r + 1 = 0$. Tällä on kaksinkertainen juuri $r = -1$, jolloin yleinen ratkaisu on

$$y = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t},$$

missä riippumatonta muuttujaa on merkitty t:llä. Ratkaisun derivaatta on

$$z = y' = (C_2 - C_1)e^{-t} - C_2 t e^{-t}.$$

Yhtälöä vastaava normaaliryhmä on

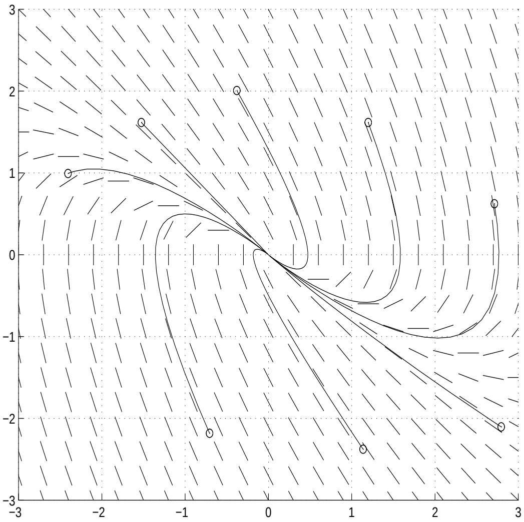
$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = -y - 2z. \end{cases}$$

Tämä on autonominen ja antaa siis mahdollisuuden piirtää faasitasoon ratkaisujen suuntakenttä. Faasitasossa olevat ratkaisukäyrät ovat käyriä, joiden parametriesitys saadaan yhtälön ratkaisusta:

$$\begin{cases} y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}, \\ z(t) = (C_2 - C_1)e^{-t} - C_2 t e^{-t}. \end{cases}$$

Tässä t on käyräparametrin asemassa. Alkuehto $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$ määrää suuntakenttäkuviossa pisteen (y_0, z_0), jonka kautta ratkaisukäyrä kulkee, ja toisaalta vakioiden C_1 ja C_2 arvot parametriesityksessä.

Faasitasoesitys näyttää seuraavalta:



Kaikki ratkaisukäyrät suuntautuvat origoon, koska $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} z(t) = 0$. Lukija pohtikoon, milloin origon lähestyminen on suoraviivaista ja miten tämä ilmenee funktioiden $y(t)$ ja $z(t)$ lausekkeista.

Faasitason ratkaisukäyrien yhtälö $F(y,z) = 0$ voidaan löytää ratkaisemalla normaaliryhmä. Tämä voidaan nimittäin palauttaa yhteen ensimmäisen kertaluvun yhtälöön puolittain jakamalla:

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{z}{y + 2z}.$$

Tulokseksi saadaan

$$\frac{y}{y+z} + \ln|y+z| + C = 0.$$

Linkkejä

vakiokertoiminen homogeeninen yhtälö
palauttaminen ensimmäiseen kertalukuun (kohta 2)
autonominen yhtälö
normaaliryhmä
faasitaso

Simo K. Kivelä 26.04.2001