Alkuarvoprobleema, jonka ratkaisu ei ole yksikäsitteinen

Differentiaaliyhtälö $y' = 3y^{2/3}$ on separoituva, ja tällä tavoin sen ratkaisuksi saadaan

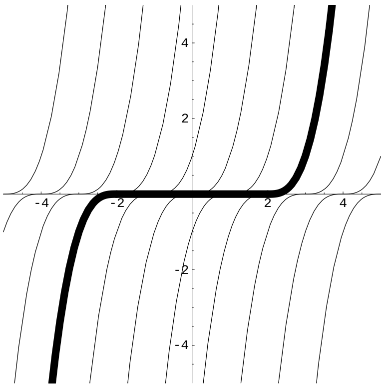
$$y = (x+C)^3.$$

Alkuehtoa $y(0) = 0$ vastaava ratkaisu näyttäisi olevan $y = x^3$.

Alkuehdon täyttäviä ratkaisuja on kuitenkin muitakin. Yhtälön ensinnäkin selvästi toteuttaa identtisesti häviävä funktio: $y(x) = 0$ kaikilla x. Myös paloittain määritelty funktio

$$y(x) = \begin{cases} (x-a)^3, & \text{jos } x < a, \\ 0, & \text{jos } a \le x \le b, \\ (x-b)^3, & \text{jos } x > b, \end{cases} \qquad \text{missä } a < 0 < b,$$

on alkuarvoprobleeman ratkaisu, sillä funktio on kaikkialla derivoituva ja toteuttaa sekä differentiaaliyhtälön että alkuehdon. Alkuehdon toteuttavia ratkaisuja on siten äärettömän paljon.



Differentiaaliyhtälön oikean puolen funktio $f(x,y) = 3y^{2/3}$ on kaikkialla jatkuva, mutta sen osittaisderivaatta

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{y^{1/3}}$$

ei ole määritelty x-akselilla eikä sitä voida määritelläkään siten, että siitä tulisi jatkuva. Alkuarvoprobleeman ratkaisun yksikäsitteisyyttä koskevan lauseen oletukset eivät siten toteudu.

Linkkejä

alkuarvoprobleeman ratkaisun olemassaolo ja yksikäsitteisyys
separoituva yhtälö

Simo K. Kivelä 26.04.2001