

Kahden yhtälön ryhmän ratkaiseminen yhteen yhtälöön palauttamalla

Differentiaaliyhtälöryhmästä

$$\begin{cases} t^2 x'(t) + y(t) = t^2, \\ y'(t) + 2x(t) = t \end{cases}$$

voidaan muodostaa vain funktiota y koskeva yhtälö derivoimalla ryhmän jälkimmäinen yhtälö ja eliminoimalla saaduista kolmesta yhtälöstä x ja x' . Yhtälöryhmä ei tosin ole normaalimuodossa, mutta tällä ei ole merkitystä.

Derivoinnilla saatava kolmen yhtälön ryhmä on

$$\begin{cases} t^2 x' + y = t^2, \\ y' + 2x = t, \\ y'' + 2x' = 1. \end{cases}$$

Kahdesta viimeisestä ratkaisemalla saadaan

$$x = \frac{1}{2}(t - y'), \quad x' = \frac{1}{2}(1 - y'')$$

ja kun nämä sijoitetaan ensimmäiseen yhtälöön, päädytään toisen kertaluvun yhtälöön

$$\frac{1}{2}t^2(1 - y'') + y = t^2 \quad \text{eli} \quad t^2 y'' - 2y = -t^2.$$

Itse asiassa funktiota x ei edes tarvitse sijoittaa, mutta periaatteessa ensimmäinen yhtälö olisi saattanut sisältää myös tällaisen termin.

Funktiolle y on siten saatu toisen kertaluvun lineaarinen epähomogeeninen yhtälö. Vastaava homogeeniyhtälö on Eulerin yhtälö. Menetelmät yhtälön ratkaisemiseen ovat siis olemassa ja ratkaisuksi saadaan

$$y = C_1 t^2 + \frac{C_2}{t} - \frac{1}{3} t^2 \ln |t|.$$

Toinen tuntematon funktio x saadaan tämän jälkeen helposti:

$$x = \frac{1}{2}(t - y') = \left(\frac{2}{3} - C_1\right)t + \frac{C_2}{2t^2} + \frac{1}{3}t \ln |t|.$$

Periaatteessa funktio x voitaisiin ratkaista myös derivoimalla alkuperäisen yhtälöryhmän ensimmäinen yhtälö ja eliminoimalla täten saaduista kolmesta yhtälöstä funktio y . Tuloksena olisi toisen kertaluvun lineaariyhtälö funktiolle x . Tämän ratkaiseminen johtaisi lausekkeeseen, jossa on kaksi uutta integroimisvakiota, esimerkiksi D_1 ja D_2 .

Ratkaisuun tulisi siis kaikkiaan neljä vakiota: C_1, C_2, D_1, D_2 . Kuitenkin edellä saadussa ratkaisussa funktioiden x ja y lausekkeissa on vain kaksi riippumatonta vakiota, C_1 ja C_2 . Selityksenä on, että vakiot C_1, C_2, D_1, D_2 eivät ole toisistaan riippumattomia, vaan niiden välillä on sideehtoja, jotka eivät paljastu, jos tuntemattomat funktiot etsitään toisistaan riippumattomasti.

Linkkejä

ryhmän palauttaminen yhteen yhtälöön
differentiaaliyhtälöryhmän normaalimuoto
toisen kertaluvun lineaarinen ja epähomogeeninen yhtälö
Eulerin yhtälö, esimerkki

Simo K. Kivelä 26.04.2001