Eksakti differentiaaliyhtälö

Käyräparven $F(x,y) = C$ differentiaaliyhtälöä johdettaessa yhtälö derivoidaan muuttujan x suhteen, jolloin saadaan

$$F_x(x,y) + F_y(x,y)y' = 0,$$

missä alaindeksit tarkoittavat osittaisderivaattoja. Tämä on parven differentiaaliyhtälö, koska se ei enää sisällä vakiota C.

Kääntäen voidaan kysyä, onko mahdollista ratkaista differentiaaliyhtälö

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$$

tulkitsemalla $P(x,y)$ ja $Q(x,y)$ jonkin funktion $F(x,y)$ osittaisderivaatoiksi, jolloin ratkaisu olisi $F(x,y) = C$.

Yleisesti näin ei ole. Jos nimittäin olisi $P(x,y) = F_x(x,y)$ ja $Q(x,y) = F_y(x,y)$, olisi sangen yleisillä edellytyksillä voimassa olevan sekaderivaattojen yhtäsuuruuden takia

$$P_y(x,y) = F_{xy}(x,y) = F_{yx}(x,y) = Q_x(x,y).$$

Ainakin siis tulee olla voimassa

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y) \quad \text{eli} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Voidaan osoittaa, että tämä ehto on myös riittävä funktion F olemassaololle. Tällöin sanotaan, että differentiaaliyhtälö on *eksakti*.

Eksakti differentiaaliyhtälö $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ voidaan siten ratkaista integroimalla funktio $P(x,y)$ muuttujan x suhteen, jolloin saadaan

$$F(x,y) = \int P(x,y)\,dx + f(y).$$

Tässä integroimisvakio $f(y)$ riippuu muuttujasta y, joka on integroinnin kannalta vakio. Funktio $f(y)$ on määrättävä ehdosta $F_y(x,y) = Q(x,y)$, minkä jälkeen differentiaaliyhtälön ratkaisu saadaan muodossa $F(x,y) = C$.

Linkkejä

eksakti differentiaaliyhtälö, esimerkki
integroiva tekijä
käyräparven differentiaaliyhtälö

Simo K. Kivelä 30.03.2001