# Lineaarisen ryhmän matriisimuoto

Lineaarinen differentiaaliyhtälöryhmä on muotoa

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t), \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t), \\ \quad \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t), \end{cases}$$

eli

$$x_j'(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t)x_k(t) + b_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Funktiot $a_{jk}(t)$ ja $b_j(t)$ ovat tunnettuja, funktiot $x_j(t)$ ovat probleeman tuntemattomat.

Muodostamalla kerroinfunktioista ja tuntemattomista funktioista matriisit

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}, \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

voidaan yhtälöryhmä kirjoittaa yksinkertaiseen matriisimuotoon

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t).$$

Tämä mahdollistaa matriisialgebran ja erityisesti ominaisarvoteorian käytön yhtälöryhmän ratkaisemisessa.

Esimerkiksi jos kyseessä on homogeeninen ryhmä, ts. $B(t) = 0$, ja kertoimet $a_{ij}(t)$ ovat vakioita, jolloin $A(t) = A$ on vakiomatriisi, ryhmä saa muodon

$$X'(t) = AX(t).$$

Tämän ratkaisu on tapana kirjoittaa muotoon

$$X(t) = e^{tA}C,$$

missä $e^{tA}$ on eräs neliömatriisi ja $C$ on määräämättömien vakioiden muodostama pystyvektori. Ratkaisu on siten analoginen elementaarin differentiaaliyhtälön $y' = ay$ ratkaisun $y = Ce^{at}$ kanssa. Edellytyksenä kuitenkin on, että matriisieksponenttifunktio $e^{tA}$ on ensin määritelty.

Matriisialgebran hyödyntämistä ei tässä lähemmin käsitellä.

**Linkkejä**

differentiaaliyhtälöryhmän normaalimuoto

*Simo K. Kivelä* 29.03.2001