

# Toisen tai korkeamman kertaluvun yhtälön muuntaminen normaaliryhmäksi

1) Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä

$$x^2 y'' + 2xy' + y'^2 y^2 = 0$$

vastaava normaaliryhmä muodostetaan seuraavasti: Otetaan käyttöön uusi tuntematon funktio  $z = y'$ ; tällöin  $y'' = z'$ . Differentiaaliyhtälö saa nyt muodon

$$x^2 z' + 2xz + z^2 y^2 = 0.$$

Normaaliryhmässä on kaksi tuntematonta funktiota,  $y$  ja  $z$ ; ryhmän yhtälöt esittävät näiden derivaatat funktioiden ja muuttujan  $x$  avulla:

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = -\frac{2z}{x} - \frac{y^2 z^2}{x^2}. \end{cases}$$

2) Neljännen kertaluvun yhtälöä  $y'''' + xy = 0$  vastaavaa normaaliryhmää muodostettaessa uusiksi tuntemattomiksi funktioiksi otetaan funktion  $y$  derivaatat kolmanteen kertalukuun saakka:  $u = y'$ ,  $v = y''$ ,  $w = y'''$ . Tällöin  $y' = u$ ,  $u' = y'' = v$ ,  $v' = y''' = w$  ja differentiaaliyhtälön mukaan  $w' = y'''' = -xy$ .

Normaaliryhmä on siten

$$\begin{cases} y' = u, \\ u' = v, \\ v' = w, \\ w' = -xy. \end{cases}$$

Ryhmä voidaan kirjoittaa vektorimuotoon merkitsemällä

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

ja määrittelemällä vektoriarvoinen funktio  $F$  yhtälöllä

$$F(x, Y) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ -xy \end{pmatrix}.$$

Tällöin normaaliryhmä vastaa vektoryhtälöä

$$Y' = F(x, Y).$$

## Linkkejä

[normaaliryhmä](#)