Yhtälön muuntaminen separoituvaksi sijoituksella $u = y/x$

Differentiaaliyhtälössä

$$y' = \frac{x+y}{x-y} \qquad \text{eli} \qquad y' = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$$

oikea puoli on funktio osamäärästä y/x, jolloin se on muunnettavissa separoituvaksi sijoituksella $y(x) = xu(x)$. Koska tällöin $y' = u + xu'$, saa yhtälö muodon

$$xu' = \frac{1+u}{1-u} - u \qquad \text{eli} \qquad xu' = \frac{1+u^2}{1-u}.$$

Separoituna tämä on

$$\frac{1-u}{1+u^2}\,du = \frac{1}{x}\,dx$$

ja puolittainen integrointi antaa

$$-\ln\sqrt{1+u^2} + \arctan u = \ln|x| + \ln|C|.$$

Sijoittamalla $u = y/x$ päädytään yhtälöön

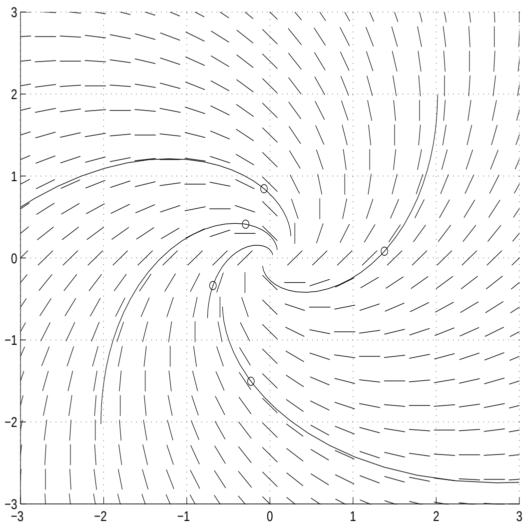
$$\arctan\frac{y}{x} = \ln(|C|\sqrt{x^2+y^2}),$$

mikä siis on differentiaaliyhtälön ratkaisu implisiittisessä muodossa. Kyseessä on transkendenttiyhtälö, josta ei voida ratkaista lauseketta funktiolle $y(x)$, vaikka yhtälö sopivasti rajoitetuilla väleillä funktion määritteleekin.

Yhtälön ratkaisukäyriä voidaan tutkia siirtymällä napakoordinaatteihin, so. sijoittamalla yhtälöön $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$:

$$\varphi = \ln(|C|r) \qquad \text{eli} \qquad r = C_1 e^{\varphi}, \quad \text{missä } C_1 = 1/|C| > 0.$$

Kyseessä ovat positiiviseen suuntaan auki kiertyvät spiraalit. Sopivasti katkaistut spiraalinkaaret ovat yhtälön ratkaisufunktioiden kuvaajia:



Linkkejä

separoituva yhtälö
separoituvaan palautuva yhtälö

Simo K. Kivelä   26.04.2001