Toisen kertaluvun yhtälön muuntaminen normaaliryhmäksi ja ratkaiseminen separoimalla

Autonomista toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä $yy'' = y'^2 + yy'$ vastaava normaaliryhmä on

$$\begin{cases} y' = \dfrac{dy}{dx} = z, \\ z' = \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z^2 + yz}{y}. \end{cases}$$

Jos yhtälöt jaetaan puolittain ja differentiaaliosamäärämerkinnöistä supistetaan dx pois, päädytään yhtälöön

$$\frac{dz}{dy} = \frac{z^2 + yz}{yz},$$

joka riippuu vain muuttujista y ja z. Sitä voidaan siis pitää differentiaaliyhtälönä, joka määrää näiden välisen riippuvuuden.

Sijoituksella $u(y) = z(y)/y$ yhtälö voidaan palauttaa separoituvaksi. Koska $z = uy$, on $\dfrac{dz}{dy} = y\dfrac{du}{dy} + u$. Tällöin yhtälö saa muodon

$$y\frac{du}{dy} + u = u + 1 \quad \text{eli} \quad du = \frac{dy}{y}.$$

Integroimalla puolittain saadaan $u = \ln|C_1 y|$, jolloin integroimisvakio on kirjoitettu muotoon $\ln|C_1|$. (Miksi näin voidaan tehdä rajoittamatta vakion arvoja?) Koska $u = z/y$, saadaan muuttujien y ja z väliseksi riippuvuudeksi $z = y\ln|C_1 y|$. Kyseessä on normaaliryhmän ratkaisujen faasitasoesitysten yhtälö.

Normaaliryhmän ensimmäisen yhtälön mukaan on nyt

$$y' = \frac{dy}{dx} = y\ln|C_1 y|,$$

mikä on jälleen separoituva yhtälö. Separoimalla saadaan

$$dx = \frac{dy}{y\ln|C_1 y|}$$

ja puolittain integroimalla

$$x + C_2 = \ln|\ln|C_1 y||.$$

Ratkaisemalla y:n suhteen ja sieventämällä saadaan alkuperäisen differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu

$$y = D_1 e^{D_2 e^x},$$

missä on otettu käyttöön uudet vakiot $D_1 = 1/C_1$ ja $D_2 = \pm e^{C_2}$.

Linkkejä

palauttaminen ensimmäiseen kertalukuun
separoituva yhtälö
separoituvaan palautuva ensimmäisen kertaluvun yhtälö
normaaliryhmä
autonominen yhtälö
faasitaso

Simo K. Kivelä 26.04.2001