Kolmannen kertaluvun yhtälön palauttaminen ensimmäiseen kertalukuun ja ratkaiseminen separoimalla

Kolmannen kertaluvun autonomista yhtälöä $y'''(1+y'^2) = 3y'y''^2$ vastaa normaaliryhmä

$$\begin{cases} y' = \dfrac{dy}{dx} = u, \\ u' = \dfrac{du}{dx} = v, \\ v' = \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{3uv^2}{1+u^2}. \end{cases}$$

Kun kolmas yhtälö puolittain jaetaan toisella, saadaan vain muuttujista u ja v riippuva ensimmäisen kertaluvun yhtälö:

$$\frac{dv}{du} = \frac{3uv}{1+u^2}.$$

Tämä on separoituva ja sen ratkaisu voidaan saattaa muotoon

$$v = C_1(1+u^2)^{3/2}.$$

Kyseessä on differentiaaliyhtälön ensimmäinen integraali.

Normaaliryhmän toisen yhtälön mukaan on

$$\frac{du}{dx} = C_1(1+u^2)^{3/2},$$

mikä jälleen on separoituva yhtälö. Separointi ja puolittainen integrointi antavat

$$C_1x + C_2 = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}},$$

jolloin

$$u^2 = \frac{(C_1x+C_2)^2}{1-(C_1x+C_2)^2}.$$

On saatu differentiaaliyhtälön toinen integraali.

Normaaliryhmän ensimmäinen yhtälö antaa nyt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1x+C_2}{\sqrt{1-(C_1x+C_2)^2}},$$

joten ratkaisu saadaan yhdellä integroinnilla:

$$y = -\frac{\sqrt{1-(C_1x+C_2)^2}}{C_1} - \frac{C_3}{C_1}.$$

Integroimisvakio on kirjoitettu muotoon $-C_3/C_1$, mikä saa kaikki reaaliarvot C_3:n arvon vaihdellessa, ts. valinta ei rajoita vakion arvoja. Tulos voidaan kirjoittaa symmetriseen muotoon

$$(C_1x+C_2)^2 + (C_1y+C_3)^2 = 1.$$

Tätä voidaan kutsua differentiaaliyhtälön kolmanneksi integraaliksi.

Jakamalla yhtälö luvulla C_1^2 ja merkitsemällä $D_1 = C_2/C_1$, $D_2 = C_3/C_1$, $D_3 = 1/C_1$ päädytään muotoon

$$(x+D_1)^2 + (y+D_2)^2 = D_3^2.$$

Tämä osoittaa, että kyseessä on tason kaikkien ympyröiden muodostama käyräparvi ja alkuperäinen differentiaaliyhtälö on siis tämän käyräparven differentiaaliyhtälö.

Lukija pohtikoon, mitä tapahtuu, jos $C_1 = 0$. Millaisia ratkaisuja tämä antaa yhtälölle?

Linkkejä

palauttaminen ensimmäiseen kertalukuun
separoituva yhtälö
normaaliryhmä
käyräparvi ja differentiaaliyhtälö
käyräparven differentiaaliyhtälön etsiminen / mma
käyräparven differentiaaliyhtälön etsiminen / mpl

Simo K. Kivelä 26.04.2001